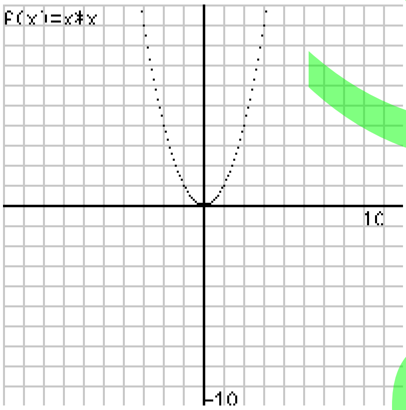
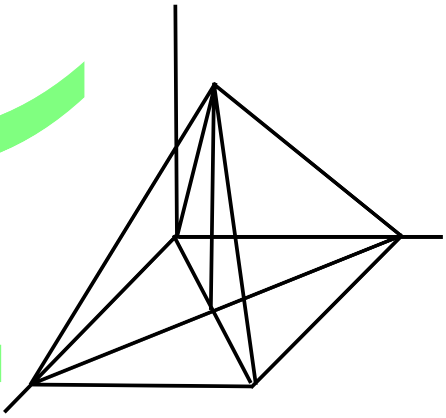
Mathe-Lesebuch





Analysis **Vektorrechnung**

Wahrscheinlichkeitsrechnung

	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	C36
0	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	C35
	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	C34
	12P				12M				12D				
	1-18		gerade						ungerade		19-36		

© Udo Kaden

Vorwort:
In diesem Lesebuch werden die derzeit (ab etwa 2017) im Abitur verlangten Themen in Geschichtsform (Ute und Uwe) behandelt. Es wurde mit dem kostenlos downloadbaren LibreOffice Writer geschrieben und verwendet als Hilfsmittel einen wissenschaftlichen Taschenrechner. Die Funktionsgraphen sind meist mit meinem einfachen php-Plotter (s. www.ckaden.de) erstellt.

Jeder an der derzeitigen Schulmathematik Interessierte kann das Buch auch ohne größere Vorkenntnisse lesen. Besonderer Wert wurde auch auf Allgemeinbildendes gelegt. Wert wird auf plausible Erkärungen gelegt
Die Inhalte sind auf das berufliche Gymnasium angelegt, wobei darüber Hinausgehendes mit [*] markiert ist.
Alte Abituraufgaben findet man bei www.mathe-aufgaben.com.

In Teil 1 werden zunächst algebraische Grundkenntnisse, betreffend Gleichungen, behandelt.
Teil 2 handelt dann von Analysis, Vektorrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Teil 3 Gebrochen rationale Funktionen

Teil 1 Mittelstufe

In diesem Teil lernen wir etwas Algebra, der Hauptursache für das Scheitern im Mathematikunterricht.

1. Lineare Gleichungen

Uwe und Ute haben die Geschäftsidee, dass sie auf dem Flohmarkt Sammelgegenstände kaufen und diese auf ihrer Homepage anbieten.

Dabei benutzen sie ein Tabellenkalkulationsprogramm

Ware	Einkauf	Aufschlag%	Versand	Endpreis
Pferdchen	15	30	3,5	23

Der Endpreis wurde automatisch berechnet. Dazu muss man in das letzte Feld folgendes eingeben:

=<B2>+<B2>*<C2>/100+<D2>

(in der Textdatei ist dies sichtbar!)

Erklärung:

Die Inhalte der Tabellenfelder werden intern folgendermaßen gespeichert:

<A1>	<A2>	<A3>	<A4>	<A5>
<B1>	<B2>	<B3>	<B4>	<B5>
<C1>	<C2>	<C3>	<C4>	<C5>

Mit dem vorgestellten Gleichheitszeichen wird dem Programm mitgeteilt, dass eine Berechnung durchgeführt werden soll.

Mathematisch würde die Formel folgendermaßen aussehen

$y=x+xp/100+v$

Die Buchstaben sind Variable (Speicher für Zahlen)

y … Endpreis

x … Einkaufspreis

p … Prozentsatz

v … Versandkosten

Hat man eine Formel, braucht man sich die korrekte

Berechnung nicht immer neu zu überlegen.
Die Aufstellung der Formel kann uns natürlich kein Computer abnehmen.
Im Zusammenhang mit der Aufstellung von Formeln steht das Lösen von Gleichungen.
Ein Zahlenrätsel soll als einfaches Beispiel dienen.
Eine unbekannte Zahl wird zunächst verdoppelt, dann wird vom Ergebnis 5 subtrahiert. Das Ergebnis ist 11. Wie heißt die Zahl?
Wählt man für die unbekannte Zahl die Variable x, dann gilt:

$2\cdot x-5=11|+5$

$2\cdot x\quad=16|:2$

$x=8$

Probe: $2\cdot 8-5=11, 16-5=11$

Erläuterung: Man verwendet unter Beachtung der arithmetischen Rechenregeln passende Gegenoperationen.
Gegenoperationspaare sind Addition(+), Subtraktion(-) und Multiplikation(·), Division(:).
Weitere Beispiele.
Die unbekannte Zahl wird jetzt zuerst um 5 vermindert, dann wird das Ergebnis verdoppelt. Das Endergebnis soll 11 sein.

$(x-5)\cdot 2=11|:2$

$x-5=5{,}5|+5$

$x=10{,}5$

oder:

$(x-5)\cdot 2=11|$Klammer ausmultiplizieren

$2\cdot x-10=11|+10$

$2\cdot x=21|:2$

$x=10{,}5$

Ein Problem stellen Minusklammern dar.

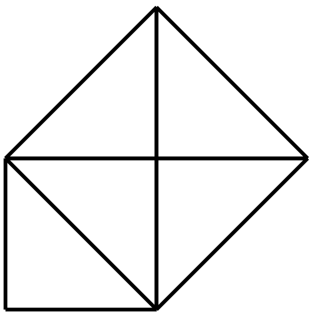
$2-(x-5)=11|$Klammer auflösen $(-\leftrightarrow+)$

$2-x+10=11|$zusammenfassen

$12-x=11|-11$

$-x=-1|\cdot(-1)$
$x=1$
Zu beachten sind hier die Vorzeichenregeln.
$(-1)\cdot(-1)=+1=1$, $(-1)\cdot(+1)=(+1)(-1)=-1$
Diese wirken sich auch auf die Auflösung von Minusklammern aus.
Ergebnis: Lineare Gleichungen können durch geeignete Anwendungen der Grundrechenarten gelöst werden.

2. Quadratische Gleichungen
Ute bietet in ihrem Internetshop gestickte Deckchen an. Diese sind quadratisch mit einer Seitenlänge von 1dm.
Jetzt möchte sie die gleichen Deckchen mit doppeltem Flächeninhalt anbieten.
Sie kann aber die richtige Seitenlänge nicht finden.
1,4dm ist zu klein und 1,5dm zu groß.
Sie fragt Uwe, der schon eine Klasse höher ist.
Uwe weist Ute darauf hin, dass es sich hierbei um ein Jahrtausend altes Problem handelt. Geometrisch sei das Problem aber leicht zu lösen, sie solle nur ein Deckchen sticken, dessen Seite so lang ist, wie die Diagonale des 1dm-Quadrats.
Er zeigt ihr folgende Figur, an der der Sachverhalt ablesbar ist.



Algebraisch liegt der Sachverhalt vor, dass man die Gleichung $x^2=2$ nicht mit einen Bruch lösen kann.

Näherungsweise kann sie aber mit beliebiger Genauigkeit lösen, sie solle mal $\sqrt{2}$ in den TR eintippen
$\sqrt{2}$=1,414...
Uwe erwähnt noch, dass die Ziffernfolge weder abbricht noch irgendwann periodisch wird.
Jetzt fängt er auch noch an zu philosophieren. Mathematik würde die Wirklichkeit halt nur modellieren.
Ute probiert noch einige Wurzeln aus und interessiert sich schließlich für Lösung quadratischer Gleichungen.
Uwe schlägt vor, dass sie die Deckchen nach dem Goldenen Schnitt fertigt (Abbildung s.u.)
Dabei muss gelten

$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$, wobei eine Seite a, die andere a+b ist.

$\frac{a}{b}=1+\frac{b}{a}$ (rechte Seite aufgespalten)

Jetzt setzt man $\frac{a}{b}$=x und $\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$ und erhält

$x=1+\frac{1}{x} \mid \cdot x$

$x^2=x+1$ und schon hat man eine quadratische Gleichung.
Ute ist gespannt, wie Uwe die Gleichung lösen will.
Uwe erklärt, dass man die Gleichung auf die Form $x^2+px+q=0$ bringen muss, dann wird die Lösung durch folgende Formel geliefert wird:

$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, unter der Wurzel darf aber nichts Negatives stehen; die Formel kann durch Einsetzen bestätigt werden.
Oder: (folgt aus pq-Formel, p=b/a, q=c/a, ...)

$ax^2+bx+c=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a}$, falls $b^2-4ac\geq 0$

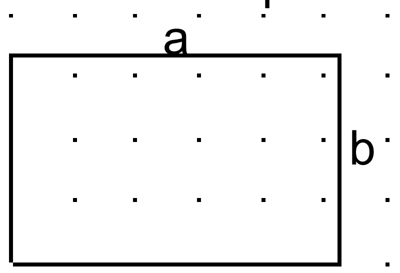
Zur Lösung der vorliegenden Gleichung:

$x^2-x-1=0$, $p=-1$, $q=-1$: $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Aus geometrischen Gründen gilt nur das Pluszeichen.

Ergebnis: $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mit $\sqrt{5}\approx 2{,}24$

Zeichenbeispiel mit $b=2$ und $a=1+\sqrt{5}$



Uwe erwähnt noch, dass diese Form doch viel schöner ist als die quadratische.
Tatsächlich spielt dieses Verhältnis in der Ästhetik eine Rolle.
Der Umgang mit Wurzeln wird noch durch folgende Regeln erleichtert:
$\sqrt{a^2}=a$, $(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geq 0)$
(Wurzel und Quadrieren sind ebenfalls Umkehroperationen voneinander)
weitere Regeln $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$
aber: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$
jedoch: $c\sqrt{a}+c\sqrt{b}=c(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ (Distributivgesetz)

Für Gleichungen mit höhergradigen Potenzen von x gibt es keine einfachen Lösungsformeln. Jedoch kann es nicht mehr Lösungen geben, als die höchste x-Potenz anzeigt.
z.B. hat $x^5-x^4-x^3+x^2+x-1=0$ höchstens 5 Lösungen und mindestens eine, da 5 als größte Hochzahl ungerade ist.
Die Näherungsmethode besteht dann darin, dass man den Term $x^5-x^4-x^3+x^2+2x-1$ auf Vorzeichenwechsel untersucht und so eine Lösung eingrenzt.

Für $x=0$ hat der Term den Wert -1, für $x=1$ den Wert 1, also muss zwischen 0 und 1 eine Lösung liegen. Diese kann man dann dezimal beliebig annähern.
In Sonderfällen sind exakte Lösungen möglich.
Bei $x(x-1)(x+2)=0$ sind die Lösungen 0; 1; -2 unmittelbar ablesbar, da das Produkt 0 ist, und ein Faktor 0 sein muss. (Satz vom Nullprodukt)
Bei $x^3+x^2-2x=0$ kann man x ausklammern,
$x(x^2+x-2)=0$ und die Lösung 0 unmittelbar ablesen; dass 1 und -2 weitere Lösungen sind ergibt sich aus
$x^2+x-2=0$ mit obiger Formel.
$x^4+x^2-2=0$ ist biquadratisch, man setzt $x^2=u$ und erhält
$u^2+u-2=0$ mit den Lösungen 1 und -2 für u.
$x^2=1$ führt dann auf die Lösungen -1 und 1 für x,
$x^2=-2$ hat keine reelle Lösungen.

3. Exponentialgleichungen
Uwe und Ute haben mit ihrem Internetshop schließlich 1000€ erwirtschaftet und wollen diese Summe anlegen. Ute hat eine Bank entdeckt, bei der man 2% Zins erhält, wenn man das Geld 4 Jahre anlegt und glaubt, dass man in 4 Jahren 80€ bekommt. Uwe erklärt, dass man durch den Zinseszinseffekt sogar noch mehr bekommt:
Basiskapital: 1000€
Zins 1. Jahr: 20€
Kapital nach 1. Jahr: $1020{,}00€=1000€\cdot 1{,}02$
Kapital nach 2. Jahr: $1040{,}40€=1020€\cdot 1{,}02=1000€\cdot 1{,}02^2$
Kapital nach 3. Jahr: $1000€\cdot 1{,}02^3\approx 1061{,}21€$
Kapital nach 4. Jahr: $1000€\cdot 1{,}02^4\approx 1082{,}43€$
allgemein: Zinseszinsformel
$K_x=K_0\cdot(1+p/100)^x$ (x Zeit in Jahren, p Zinssatz)
Ist die Hochzahl gesucht, erhält man eine Exponentialgleichung.

Beispiel:
$K_x=2K_0$ (Kapitalverdopplung) p=2
Die Angaben führen auf die Exponentialgleichung
$2=1{,}02^x$ |log
$\log(2)=x\cdot\log(1{,}02)$|:log(1,02)
$x=\log(2)/\log(1{,}02)\approx 35$
Mit log (Logarithmus) verhält es sich folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{10\^{}} & & \log & \\ x & \rightarrow & 10^x & \rightarrow & x \end{array}$$

Die Operationen log und 10^ sind wieder Gegenoperationen voneinandr. (vgl. ^2 und √)
genauer: $a^b=c$ (a, b, c natürliche Zahlen größer als 1)
$a={}^b\sqrt{(c)}$ … b-te Wurzel aus c: $({}^b\sqrt{(c)})^b=c$
$b={}_a\log(c)$ … Logarithmus aus c zur Basis a: $a^{{}_a\log(c)}=c$
Es wäre also ${}_2\log(8)=3$, da $2^3=8$, die meisten Logarithmuswerte sind aber irrational und können wie √(2) nur näherungsweise angegeben werden.
Für den WTR ist das natürlich kein Problem.
TR-log=${}_{10}\log$ … Logarithmus zur Basis 10
(später ln=${}_e\log$ … natürlicher Logarithmus zur Basis e)
Im Zusammenhang mit dieser Problematik gibt es folgende Regeln:

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ $\quad a^x:a^y=a^{x-y}$ $\quad 1/a=a^{-1}$ $\quad a^0=1$
$a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x$ $\quad a^x:b^x=(a:b)^x$ $\quad (a^x)^y=a^{x\cdot y}$
$\log(a^x)=x\log(a)$

(wichtig, Logarithmus nur aus positiven Zahlen, ähnlich Wurzeln nicht aus negativen Zahlen)
Es gibt zwar noch weitere Logarithmusregeln, die man aber normalerweise nicht braucht.
Beispiel einer komplizierteren Exponentialgleichung:
$3^{2x}+3\cdot 3^x-4=0$
Substitution: $3^x=y$ $\quad 3^{2x}=y^2$
Rücksubstitution: $x=\log(y)/\log(3)$

$y^2+3y-4=0$ $y_{1,2}=-1{,}5\pm2{,}5$ $x_1=\log(1)/\log(3)=0$
x_2 existiert nicht, da $y_2<0$.

Ergänzung Ungleichungen:
Man löst die Gleichung t(x)=0 und markiert die Lösungen auf der x-Achse. Setzt man einen Wert zwischen 2 Lösungen oder links der kleinsten oder rechts der größten Lösung ein, so hat der Term im ganzen Bereich das gleiche Vorzeichen.
Beispiele: 1. $x^2+2x-3\le0$
Die Gleichung hat die Lösungen -3 und 1.
t(-4)=5, t(0)=-3, t(2)=5
Damit lautet die Lösungsmenge der Ungleichung
$\{x|-3\le x\le1\}$
2. $x^2+2x-3<0$
hätte die Lösungsmenge $\{x|x<-3 \text{ oder } 1<x\}$

Zusammenfassung:
Lineare Gleichung:
$ax+b=0$ $x=\frac{-b}{a}$ $(a\neq0)$
Quadratische Gleichung: (Mitternachtsformel)
$ax^2+bx+c=0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a}$, falls $b^2-4ac\ge0$
Bi-Quadratische Gleichung: (Substitutionsmethode)
$ax^4+bx^2+c=0$, $x^2=z$, $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a}$, falls $b^2-4ac\ge0$
$x_{1...4}=\sqrt{z}$, falls $z\ge0$.
Gleichung höheren Grades:
x^n ausklammern und Klammer Null setzen und eine der obigen Methoden anwenden.
Grundsätzlich haben Gleichungen höheren Grades höchstens so viele Lösungen, wie der höchste Grad.

Quadratwurzelgleichungen:

$\sqrt{x}$ -c=0, x=c², falls c≥0.

Exponentialgleichungen:

a^x-b=0, x= $\frac{\log(b)}{\log(a)}$, a,b>0

Logarithmische Gleichung:

log(x)-c=0, x=10^c oder x=e^c, falls c>0.

Trigonometrische Gleichungen:

sin(x)-c=0, x=$\sin^{-1}$(c)+2kπ, k ganzzahlig (|c|≤1).

Dabei handelt es sich bei $\sin^{-1}$ um die Umkehrfunktion von sin.

Bei komplizierteren Gleichungen kann man durch Ausklammern und/oder Substitution zum Erfolg kommen.

Generell kann nicht jede Gleichung exakt gelöst werden. Bringt man sie auf die Form t(x)=0, so kann man die Vorzeichenwechsel des Terms t(x) untersuchen und so Näherungen finden.

z.B. x²-2=0

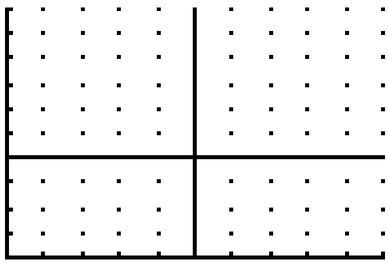
t(1)=-1, t(2)=2 d.h. zwische 1 und 2 muss eine Lösung liegen. Diese ($\sqrt{2}$) kann man übrigens auch nur näherungsweise angeben.

Teil 2 Oberstufe

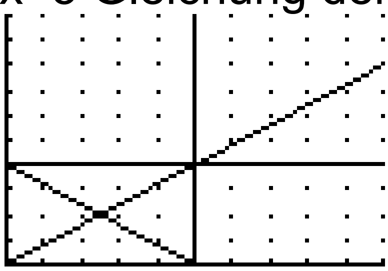
Ute und Uwe wollen sich als Landschaftsgärtner selbständig machen. Damit sie alles richtig planen und berechnen können, suchen sie zuerst ihren wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) und ihre Formelsammlung.

1. Differenzialrechnung:

1.1 Lineare Funktionen:



a) Es soll ein rechteckiges Beet der Länge 5 und der Breite 4 angelegt werden.
Ein Eckpunkt soll der Ursprung sein.
y=4 Gleichung der horizontalen Gerade
x=5 Gleichung der vertikalen Gerade



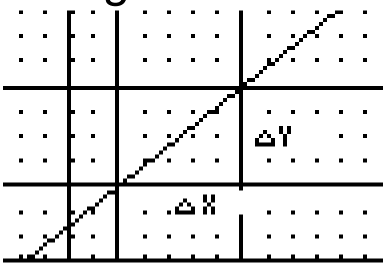
b) Durch das Beet sollen jetzt diagonal Wege verlaufen:
(1) y=(4/5)x und (2) y=-(4/5)x+4
Die Richtigkeit ergibt sich durch Einsetzen zweier Punkte:
(1): (0|0) und (5|4) in y=(4/5)x
(2): (0|4) und (5|4) in y=-(4/5)x+4
Eine Gerade ist ja durch 2 Punkte eindeutig festgelegt.

Bezeichnungen: y=mx+c
m heißt Steigung, c y-Achsenabschnitt der Geraden.
Lineare Funktion:
Setzt man in den Term -0,8x+4 eine Zahl für x ein, so ergibt sich ein bestimmtes Ergebnis; jedenfalls, wenn man richtig rechnet. (Punkt vor Strich beachten)

Gibt man einen (nichtleeren) Zahlenbereich für die x-Werte an, so spricht der Mathematiker von einer Funktion.
Wenn kein solcher Bereich angegeben ist, sind alle Zahlen

zulässig; eventuell muss man einige ausschließen (s.u.).
Die sich ergebenden y-Werte bilden die Wertemenge von f.
Schreibweise: $f(x)=-0,8x+4$ ... (gesprochen: f von x)
Bezeichnung: Abgeschlossenes Intervall [a; b] mit $a<b$;
alle Zahlen von a bis b.
Bei der Definitionsmenge (x-Werte) [0; 5] lautet die Wertemenge (y-Werte) [0; 4].
Hat ein Funktionsterm die Form $mx+c$, so spricht man von einer linearen Funktion, da ihre grafische Darstellung (Schaubild) eine Gerade ist.
Lösungen der Gleichung $f(x)=0$ heißen Nullstellen von f.
Geometrisch: Schnittpunkte mit der x-Achse.

c) Das obige Beet soll jetzt in das Innere des Grundstücks verlagert werden.

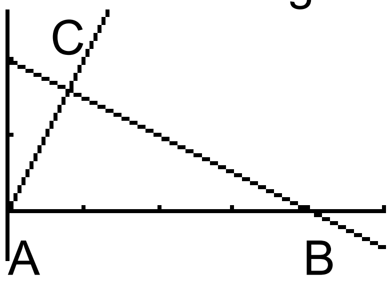


Der linke untere Eckpunkt habe die Koordinaten (2|3), der rechte obere (7|7). Setzt man die Punkte in $y=mx+c$ ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen und 2 Variablen.

$2m+c=3$ (1)
$7m+c=7$ (2)
Man muss es auf eine Gleichung mit einer Variablen reduzieren.
(2)-(1): $5m=4$, $m=0,8$ in (1): $c=1,4$: $y=0,8x+1,4$

Mit Hilfe der Formelsammlung geht es folgendermaßen:
2-Punkte-Steigungsformel:
$m=\Delta y/\Delta x=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=(7-3)/(7-2)=4/5=0,8$
Punkt-Steigungsformel : $y=m(x-x_P)+y_P$ Gerade mit Steigung m durch $P(x_P|y_P)$
$y=0,8(x-2)+3=0,8x+1,4$ oder $y=0,8(x-7)+7=0,8x+1,4$
Ute entdeckt noch die Formel für den Abstand zweier

Punkte (Satz des Pythagoras bei obiger Zeichnung):
$|P_1P_2|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$ für die Diagonale in obigem Beet.
Uwe fällt jetzt wieder ein, dass man auch Winkel berechnen kann und findet gleich die passende Formel.
Im rechtwinkligen Dreieck (90° bei C) gilt



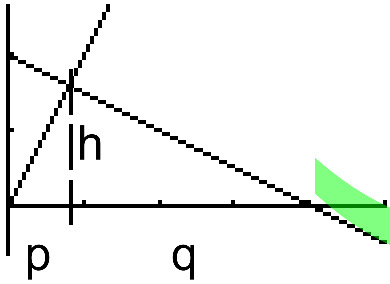
α Winkel bei A, β Winkel bei B.
AC Ankathete von α
BC Gegenkathete von α
AB Hypotenuse

sin(α)=Länge Gegenkathete(α)/Länge Hypotenuse
(sin=sinus)
cos(α)=Länge Ankathete(α)/Länge Hypotenuse
(cos=cosinus)
tan(α)=Länge Gegenkathete(α)/Länge Ankathete(α)
(tan=tangens)
Schneidet eine Gerade mit Steigung m die x-Achse unter dem Winkel α, so gilt für den Betrag der Steigung m
$|m|=\tan(\alpha)$ bzw. $\alpha=\tan^{-1}(|m|)=\tan^{-1}(0{,}8)\approx 38{,}7°$
($\tan^{-1}$ und tan sind wieder Gegenoperationen voneinander)
vorausgesetzt WTR-Winkel-Einstellung: degree

Die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke brauchen sie nicht zu suchen, da sie jedem einleuchtet der schon einmal denDurchschnitt von 2 Klassenarbeitsnoten berechnet hat:
$M_{PQ}(0{,}5(x_P+x_Q)|0{,}5(y_P+y_Q))$, für obige Diagonale M(4,5|5)

Jetzt müßte man nur noch zu einer Steigung die orthogonale Steigung haben, dann könnte man vom Mittelpunkt orthogonal abzweigen.

Sie finden in ihrer Formelsammlung: $m \cdot m_\perp = -1$

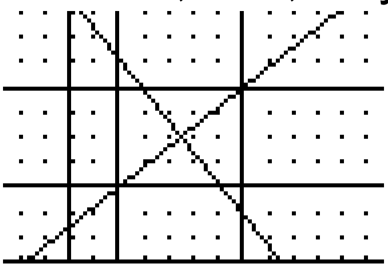


$m = h/p$, $m_\perp = -h/q$

$m \cdot m_\perp = -h^2/(pq) = -1$, da nach dem Höhensatz $h^2 = pq$ (s.. FS)

(rechtwinkliges Dreieck, $\tan(\alpha) = 1/\tan(\beta)$).

d.h. $-1/0{,}8 = -1{,}25$ $y = -1{,}25(x-4{,}5)+5 = -1{,}25x+10{,}625$



Bezeichnungen:
normal=orthogonal=senkrecht=lotrecht=
im rechten Winkel=im Winkel von 90°;
die Mathematiker machen es einem nicht leicht, ihre Wissenschaft zu verstehen.

Mit diesem Grundwissen ausgestattet können die beiden jeden geradlinigen Entwurf erstellen.

Zusammenfassung:
Geradengleichungen
$y = mx + c$ (m Steigung, c y-Achsenabschnitt)
$m = 0$:
$y = c$, Parallele zur x-Achse ($x = d$, Parallele zur y-Achse)

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ...2-Punkte-Steigungsformel

$\alpha = \tan^{-1}(m)$...Winkel mit x-Achse
$m m_\perp = -1$ … orthogonale Geraden
(Winkel zwischen 2 nichtorthogonalen Geraden s. FS)

$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$ ...2-Punkte-Abstandsformel

$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \,|\, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$...Mittelpunktsformel

Übungen:

1. Gegeben ist das Dreieck A(1|1)B(3|4)C(6|2).
Zeige auf 2 Arten, dass es gleichschenklig rechtwinklig ist und berechne den Flächeninhalt.

Lösung:

Man zeigt, dass die Pythagorasgleichung gilt

c=|AB|= $\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

a=|BC|= $\sqrt{(2-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{13}$ … d.h. gleichschenklig

b=|AC| $\sqrt{(2-1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{26}$

b²=a²+c² erfüllt, also rechtwinklig.

Flächeninhalt=0,5·g·h=0,5· $\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}$ =6,5

2. Berechne den Abstand des Punktes B von AC für die Punkte der Aufgabe 1.

Lösung:

(AC): y= $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$ (x-x_A)+y_A = $\frac{1}{5}$ (x-1)+1=0,2x+0,8

Orthogonale durch B: y=-5(x-3)+4=-5x+19

0,2x+0,8=-5x+19 … 5,2x=18,2 … x=3,5 … y=1,5

Abstand (3,5|1,5) von (3|4): $\sqrt{(4-1{,}5)^2+(3-3{,}5)^2}=\sqrt{6{,}5}$

3. Es soll untersucht werden, ob der Punkt (2|2,51) im Inneren des Dreiecks aus Aufgabe 1 liegt.

Lösung:

Man schneide die Gerade x=2 zunächst mit (AC): y=1,2

Der Punkt (2|1,2) liegt jedenfalls unterhalb (2|2,49)

(AB): y=1,5(x-1)+1=1,5x-0,5 … x=2, y=2,5

Damit liegt der Punkt innerhalb.

4. Gegeben ist die Geradenschar g_t: y=(t+1)x-t, wobei der Parameter t jede reelle Zahl sein kann.

a) Zeige, dass alle Geraden durch einen Punkt gehen.

b) Welche Gerade der Schar steht senkrecht auf der 1. Winkelhalbierenden?

c) Gibt es Punkte durch die keine Gerade der Schar geht?

Lösung:

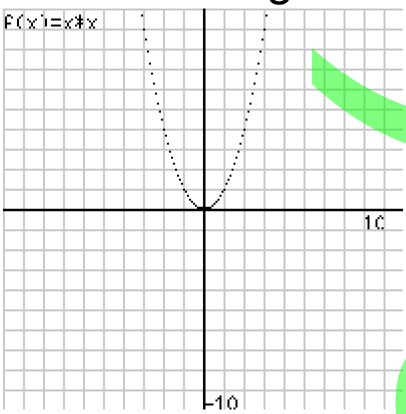
a) g_0: y=x, g_{-1}: y=-1, Schnittpunkt (-1|-1)
eingesetzt: -1=(1+t)(-1)-t, -1=-1
Da unabhängig von t eine wahre Aussage entsteht, gehen alle Geraden durch (-1|-1).

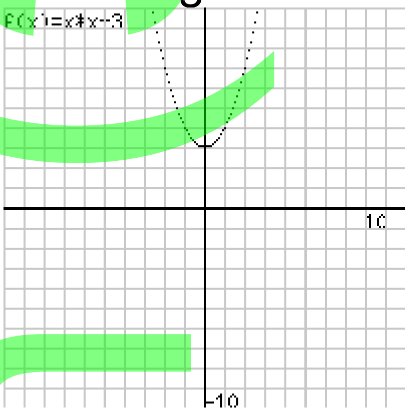
b) Da die erste Winkelhalbierende die Steigung 1 hat, muss für t die Gleichung (1+t)·1=-1, also t=-1

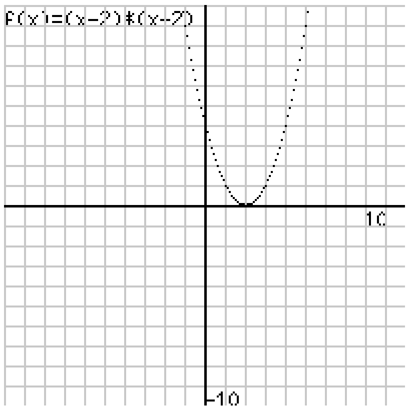
c) Setzt man in y=(t+1)x-t, x=-1, so fällt t heraus: y=-1
d.h. (-1|2) liegt z.B. auf keiner Geraden der Schar.
Setzt man diesen Punkt ein, so entsteht die falsche Aussage 2=-1.
Außer (-1|-1) gehört kein Punkt der Gerade x=-1 zur Schar.

1.2 Ganzrationale Funktionen:

Anspruchsvollere Entwürfe erfordern auch die Beherrschung des Krummlinigen.



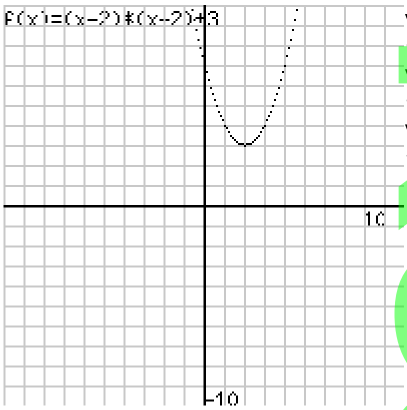




Die obige Parabel mit der Gleichung $y=x^2$ wird zunächst mit einer Wertetafel gezeichnet

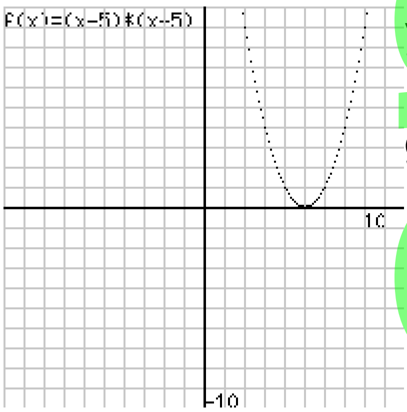
x	0	±1	±2	±3
x²	0	1	4	9

Jetzt soll sie auf der Fläche verschoben werden:

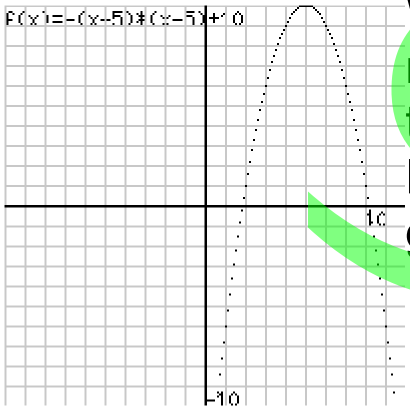


$y=x^2+3$ (3 nach oben)
$y=(x-2)^2$ (2 nach rechts)
$y=(x-2)^2+3$ (beides)

Es soll nun ein Weg von (0|0) über (5|10) zu (10|0) auf einer Parabel führen.

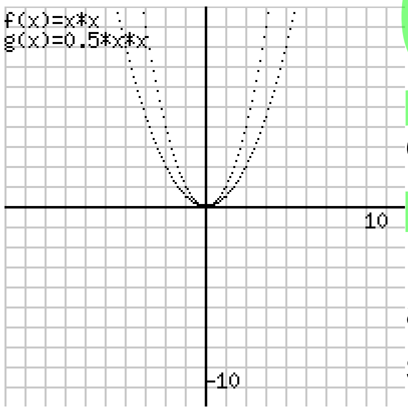


$y=(x-5)^2$ könnte stimmen, tut es aber nicht; die Parabel muss ja nach unten geöffnet sein.

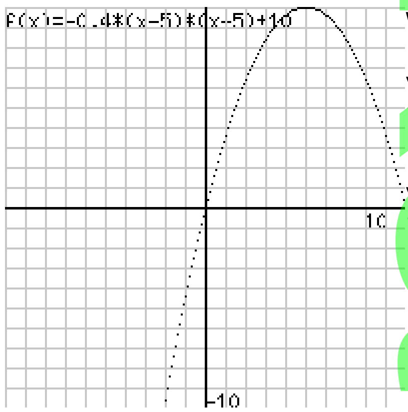


Wir versuchen es mit $y=-(x-5)^2+10$, was nicht schlecht aussieht und auch teilweise richtig ist.
Es muss etwas an der Form der Parabel geändert werden.

Wir betrachten zunächst $y=x^2$ … $y=0{,}5x^2$

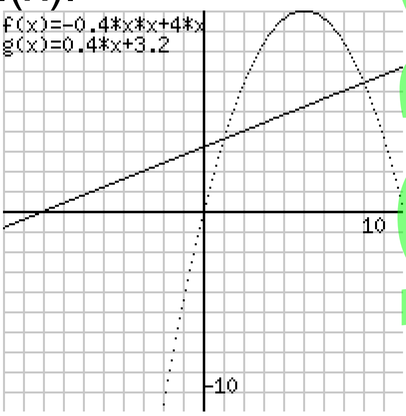


Betrachtet man den Punkt (2|4) der Normalparabel, so lautet der entsprechende Punkt der flacheren Parabel (2|2).
Die Form der flacheren Parabel ensteht aus der Normalparabel durch Streckung senkrecht zur x-Achse mit Faktor 0,5.

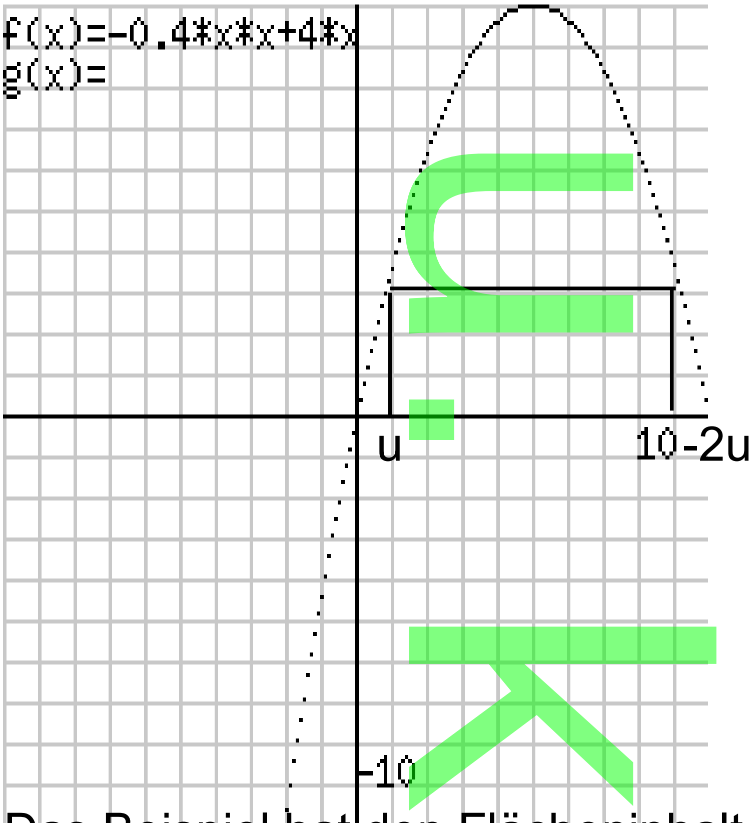


Wir benötigen also einen Faktor:
$y=-a(x-5)^2+10$
(0|0) eingesetzt: $0=-25a+10 \quad a=0{,}4$
$y=-0{,}4(x-5)^2+10$

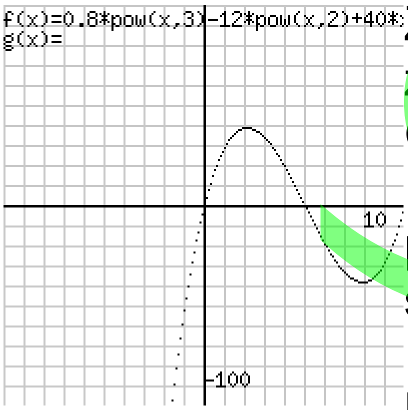
Quadratische Funktion:
Bei der Normalparabel: $y=x^2$ ist der Ursprung der Scheitel der Parabel.
Bei unserem krummlinigen Bsp.wäre dies (5|10).
Wir multiplizieren den letzten Funktionsterm aus:
$-0,4(x-5)^2+10=-0,4(x^2-10x+25)+10=-0,4x^2+4x$
Allgemein heißt ax^2+bx+c mit $a\neq 0$ quadratischer Term, Funktionen mit quadratischen Termen heißen quadratische Funktionen oder ganzrationale Funktionen zweiten Grades, ihre Schaubilder sind Parabeln.
Sicher wird der Gartenentwurf von linearen und krummlinigen Elementen beherrscht.
Sie betrachten daher
$l(x)=0,4x+3,2$ und $q(x)=-0,4x^2+4x$
Die Schnittpunkte ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsterme:
$-0,4x^2+4x= 0,4x+3,2|\cdot(-10)$
$4x^2-40x=-4x-32|+4x+32$
$4x^2-36x+32=0|:4 \quad x^2-9x+8=0$
$x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{2}$, $x_1=1$ $x_2=8$ (Formel s.o.)
Die y-Werte erhält man durch Einsetzen, am einfachsten in $l(x)$.



Als nächstes soll ein wirklich schwierigeres Problem gelöst werden.
In das parabelförmig abgegrenzte Flächenstück soll ein zu den Achsen paralleles Rechteck eingezeichnet werden.
2 der Ecken liegen auf der Parabel, die anderen auf der x-Achse .

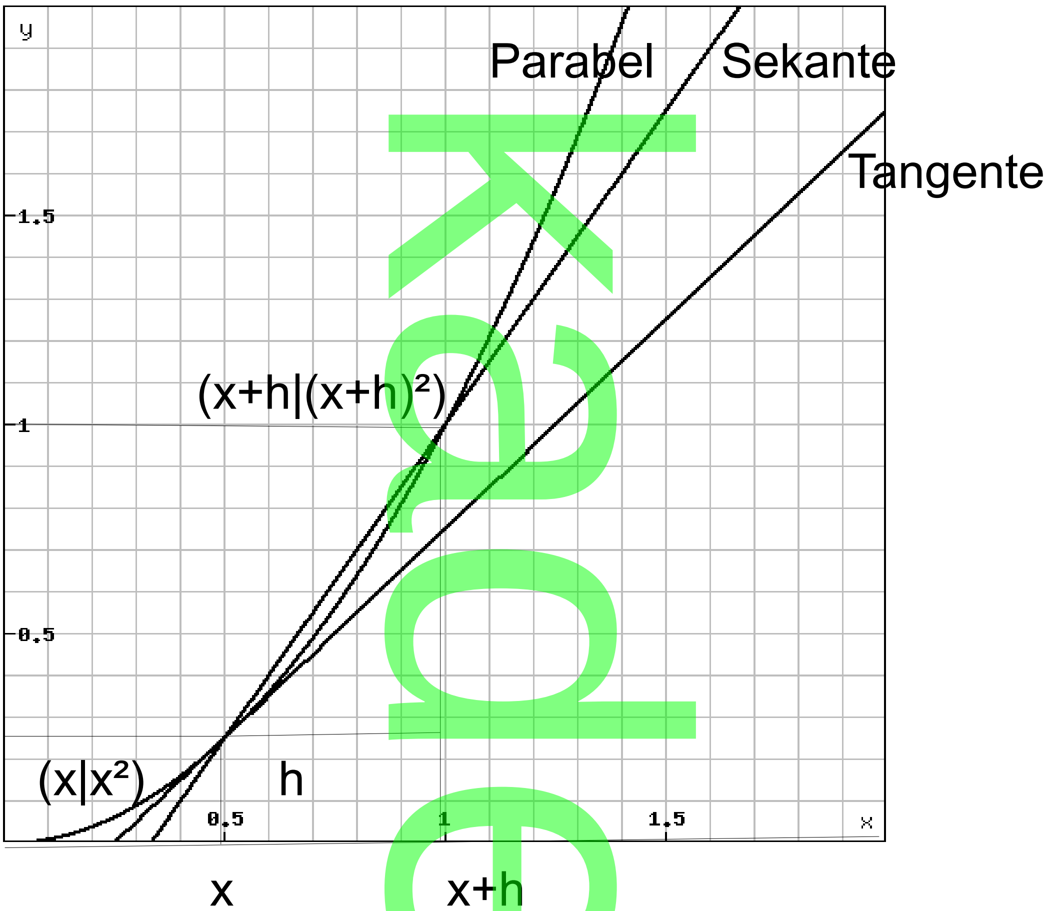


Das Beispiel hat den Flächeninhalt ≈24. Die Frage ist, ob es maximalen Inhalt hat.
Jetzt wird es Ihnen zu kompliziert. Sie fragen ihren alten Mathelehrer. Dieser gibt ihnen den Tipp, die linke untere Ecke mit (u|0) zu bezeichnen und dann einen u-Term für A(u) aufzustellen, anschließend sollen sie A(x) graphisch darstellen. Aus der Zeichnung kann man es dann ablesen.
Die untere Seite hat dann die Länge
$10-2u$,
die zur y-Achse parallele Seite ist
$q(u)=-0{,}4u^2+4u$.
Für den Flächeninhalt gilt dann
$A(u)=(10-2u)(-0{,}4u^2+4u)$ bzw. $A(x)=0{,}8x^3-12x^2+40x$



Zunächst gehört der Term $0{,}8x^3-12x^2+40x$ zu einer ganzrationalen Funktion 3. Grades.
In der Zeichnung, bei der die Einheiten passend zu wählen sind, muss man den scheitelartigen Punkt bestimmen.

Bei Ihrem ehemaligen Mathelehrer erfahren sie, dass dies etwas mit Tangenten zu tun hat. In einem scheitelartigen Punkt ist die Tangente parallel zur x-Achse, hat also die Steigung 0.
Also müssen sie sich zunächst mit Tangenten beschäftigen.
Eine Tangente (Berührende) ist eine Gerade, die mit einer Kurve einen Punkt gemeinsam hat und in einer Umgebung des Punktes eine optimale Näherung für die Kurve darstellt.



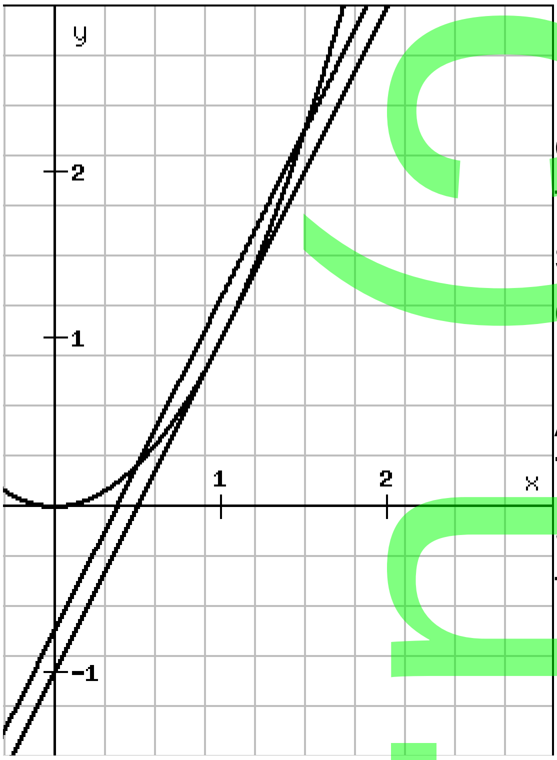
In der Abbildung ist die Sekante (Gerade durch 2 benachbarte Kurvenpunkte) durch die Punkle $(x|x^2)$ und $(x+h|(x+h)^2)$ des Schaubilds von f: $f(x)=x^2$ gezeichnet.
Sie hat die Steigung

$$m=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2\mathrm{xh}+h^2}{h}=2x\frac{h}{h}+h\frac{h}{h}$$

Natürlich möchten sie jetzt $\frac{h}{h}=1$ und h=0 setzen, was aber mathematisch nicht korrekt und bei anderen Funktionen nicht möglich ist.

Korrekt ist $\frac{h}{h}\to 1$ für $h\to 0$ und $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\to 2x$ für $h\to 0$.

Dies braucht sie aber nicht weiter zu beunruhigen, da sie ja keine Mathematiker sind und es anscheinend Formeln für alles Mögliche gibt.
Die Schreibweise nennt man Grenzwertschreibweise; viele mathematische Probleme sind nur mit Grenzwerten lösbar. (vgl. : $\sqrt{(2)}$ oder π, dies sind auch Grenzwerte)
Im gleichen Sinn, wie $\sqrt{(2)}$ oder π exakt sind, gilt dies auch für die soeben hergeleitete Formel für die Steigungen der Tangenten an das Schaubild der Funktion f: $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$.
f' heißt Ableitungsfunktion von f. Hat man die Ableitungsfunktion, so erübrigt sich natürlich die Grenzwertbestimmung.
Zu Grenzwerten:
Generell stelle man sich unter einem endlichen Grenzwert eine Zahl vor, die mit vorgegebener Genauigkeit bestimmt werden kann.
Unter ... $\to\infty$ stelle man sich vor, dass jede vorgegebene Zahl ab einer berechenbarer anderer Zahl überschritten wird.

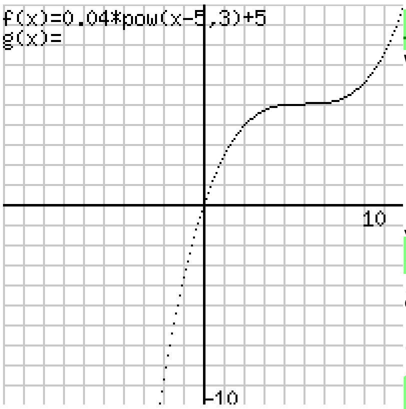


Ü:
Dargestellt sind das Schaubild der Funktion
f: $f(x)=x^2$, die Tangente in (1|1) sowie die Sekante durch (0,5|0,25) und (1,5|2,25)
Berechne die mittlere Abweichungen des Tangententerms und des Sekantenterms von f(x) über dem Intervall [0,5; 1,5] in Abständen von 0,1.

Lösung: $t(x)=2x-1$ $s(x)=2x-0{,}75$
$[f(0{,}5)-t(0{,}5)+f(0{,}6)-t(0{,}6)+...+f(0{,}9)-t(0{,}9)+f(1{,}0)-t(1{,}0)]/11$
$[s(0{,}5)-f(0{,}5)+s(0{,}6)-f(0{,}6)+...+s(0{,}9)-f(0{,}9)+s(1{,}0)-f(1{,}0)]/11$

Das ist den beiden nun wirklich zu kompliziert. Der Lehrer beruhigt sie dahingehend, dass die Ableitungen der wichtigsten Funktionen in der Formelsammlung stehen und es zusätzlich noch Ableitungsregeln gibt, die auch dort stehen
$[x^n]'=nx^{n-1}$ (bei negativen n-Werten: $x\neq 0$)
Sonderfälle: $[x]'=1$ $[c]'=0$ (c Konstante)
$[af(x)]'=af'(x)$ ein konstanter Faktor bleibt erhalten
$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$ eine Summe wird summandenweise abgeleitet
Sonderfall: $[f(x)+c]'=f'(x)$ ein konstanter Summand fällt weg.
Damit kann jede ganzrationale Funktion abgeleitet werden.
Mit dieser Auffrischung können sie wieder alleine weitermachen.

Jetzt betrachten sie nochmals obige Flächenoptimierung:
$y=0{,}8x^3-12x^2+40x$
$y'=2{,}4x^2-24x+40$ und lösen $2{,}4x^2-24x+40=0$
$x_{1,2}=(24\pm\sqrt{(192)})/4{,}8$
es kommt geometrisch nur $(24-\sqrt{(192)})/4{,}8\approx 2{,}11$ in Frage.
Damit wirklich der Maximalwert vorliegt, muss noch geprüft werden, ob die Kurve vor der Stelle x_1 steigt und anschließend fällt:
$f'(2)=1{,}6>0$ und $f'(3)=-10{,}4<0$
Logischerweise steigt (fällt) ein Schaubild, wenn seine Tangenten positive (negative) Steigung haben.
Dabei betrachte man das Schaubild als Geländeprofil.



Uwe stellt sich jetzt den gezeichneten Weg vor, weiß aber nicht, wie der Funktionsterm lautet..
Ute schlägt vor, von $y=x^3$ auszugehen...
$y=a(x-5)^3+5$ (0|0) eingesetzt: $-125a+5=0$
$a=0{,}04$ Dies liefert tatsächlich das Gewünschte.

$y=0{,}04(x-5)^3+5=0{,}04(x^3-15x^2+75x-125)+5=0{,}04x^3-0{,}6x^2+3x$

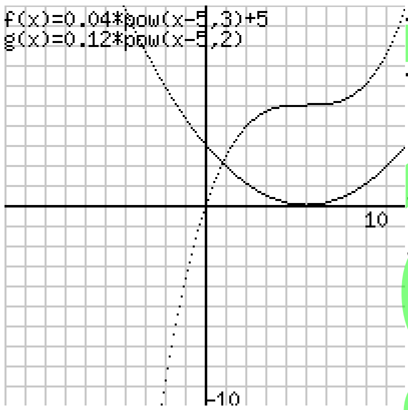
Uwe möchte jetzt wissen, ob die Steigung der Tangente an der Stelle 5 auch 0 ist, obwohl kein scheitelartiger Punkt vorliegt:
$f'(x)=0{,}12x^2-0{,}6x+3$ $\quad f'(5)=0$
Man spricht von einem Sattelpunkt.
Der Oberbegriff für scheitelartige Punkte und Sattelpunkte ist Waagepunkt, da waagrechte Tangenten vorliegen, wenn man die Zeichnung an die Tafel zeichnet.
Scheitelartige Punkte unterscheidet man noch in Hochpunkte und Tiefpunkte.

Dabei muss man den **V**or-**Z**eichen-**W**echsel von f'(x) bestimmen um Hochpunkt (VZW+-) von Tiefpunkt (VZW-+) sicher unterscheiden zu können.

Wenn $f'(x_1)=0$ ohne f'-Vorzeichenwechsel, ist (x1|f(x1))Sattelpunkt.

Ein Sattelpunkt ist ein Sonderfall eines Wendepunkts; das Schaubild geht dort von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder umgekehrt über.
Wenn man obigen Weg mit dem Fahrrad vom Ursprung aus durchfährt, so fährt man bis (5|5) eine Rechtskurve und anschließend eine Linkskurve.

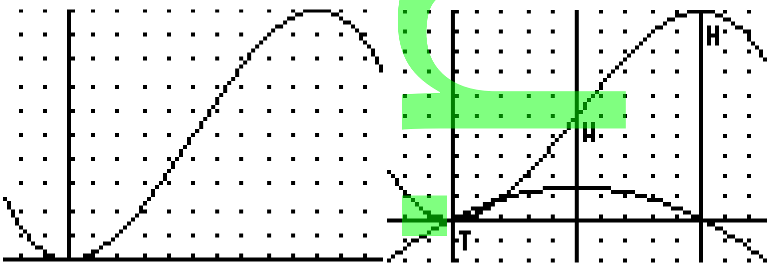
Um herauszufinden wie man Wendepunkte bestimmt betrachtet man zum Schaubild noch das Schaubild der Ableitungsfunktion.



$f(x)=0{,}04x^3-0{,}6x^2+3x$
$f'(x)=0{,}12x^2-1.2x+3$
Ersichtlich hat das f-Schaubild einen Sattelpunkt, wenn das f'-Schaubild einen Scheitelpunkt auf der x-Achse hat.

Allgemein gilt: Wenn das f'-Schaubild einen Hoch- oder Tiefpunkt (Extrempunkt) hat, hat das f-Schaubild einen Wendepunkt und umgekehrt.
Damit liegt dann eine f-Wendestelle vor, wenn f''(x)=0 und f''(x) das Vorzeichen wechselt.
Jetzt kann der Traumweg in Angriff genommen werden.
Er soll Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sein:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
Der Ursprung soll Waagepunkt sein:
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f(0)=0$: $d=0$ $f'(0)=0$: $c=0$
(5|5) soll Wendepunkt sein:
$f''(x)=6ax+2b$
$f(5)=5$: $125a+25b=5$ (1)
$f''(5)=0$: $30a+\ 2b=0$ (2)
(2): $b=-15a$ in (1): $125a-375a=5$; $-250a=5$; $a=-0{,}02$; $b=0{,}3$

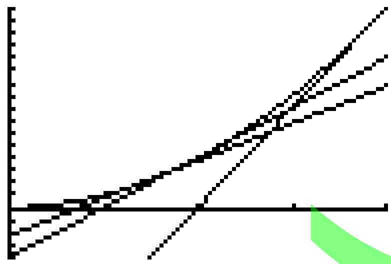


Zusammenfassung:
Wechselt das f'-Schaubild vom
Negativen (Positiven) ins Positive (Negative), so hat das f-Schaubild einen
Tiefpunkt (Hochpunkt).
d.h.Extrempunkte:
$f'(x)=0$ lösen und Lösungen auf Vorzeichenwechsel prüfen
zusätzlich:
$f'(x)>0$: Schaubild steigt streng monoton
$f'(x)<0$: Schaubild fällt streng monoton
Hat das Schaubild von f' einen Hochpunkt (Tiefpunkt), so geht das Schaubild von f an einem Wendepunkt von einer Linkskurve (Rechtskurve) über.
d.h. Wendepunkte
$f''(x)=0$ lösen und Lösungen auf Vorzeichenwechsel prüfen
zusätzlich:
$f''(x)>0$: Schaubild Linkskurve
$f''(x)<0$: Schaubild R**e**chtskurve (Eselsbrücke n**e**gativ)

Für das Schaubild C der Funktion f gilt:
$f(x_1)=0$: $(x_1|0)$ Schnittpunkt mit der x-Achse.
$f'(x_2)=0$: $(x_2|f(x_2))$ Waagepunkt
Bei Waagepunkten muss man noch das Steigungsverhalten ($f'(x)>0$:steigend), $f'(x)<0$:fallend) vor und hinter dem Waagepunkt prüfen, dann kann man entscheiden, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattel-Punkt handelt.
$f''(x_3)=0$: $(x_3|f(x_3))$ möglicher Wendepunkt.
Man muss das Krümmungsverhalten
($f''(x)>0$:LK, $f''(x)<0$:RK) vor und hinter dem fraglichen Punkt prüfen. Bei Änderung liegt ein Wendepunkt vor.

Nachtrag:
$S_y(0|f(0))$ heißt y-Achsenschnittpunkt.
Einfache Symmetrie
y-Achse: $f(-x)=f(x)$
Ursprung: $f(-x)=-f(x)$

Übungen:
0. Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=x^2$, $x\varepsilon R$.
Gesucht:
a) Tangente in $P(2|f(2))$
b) Tangente mit Steigung 3
c) Tangenten durch (3|8)
Lösung: $f'(x)=2x$ … Tangentensteigungsformel
$y=f'(u)(x-u)+f(u)$ … Tangentengleichung für $(u|f(u))$
a) $y=f'(2)(x-2)+f(2)=4(x-2)+4=4x-4$
b) $f'(x)=3 \quad 2x=3 \quad x=1{,}5$
$y=f'(1{,}5)(x-1{,}5)+f(1{,}5)=3(x-1{,}5)+2{,}25=3x-2{,}25$
c) $y=f'(u)(x-u)+f(u)$ durch (3|8): $8=2u(3-u)+u^2$
$u^2-6u+8=0 \quad u_{1,2}=3\pm1 \; u_1=4 \; u_2=2$
$y=8(x-4)+16=8x-16$
$y=4(x-2)+4=4x-4$



1. Gegeben ist die Funktion f: $f(x)=0{,}25(x+1)(2x-5)^2$, $x\varepsilon R$.
Führe eine Kurvendiskussion durch und zeichne ein Schaubild.

Lösung:

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=6{,}25$: $S_y(0|6{,}25)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $(-1|0)$, $(2{,}5|0)$
(nach dem Satz vom Nullprodukt)

Ableitungen:

$f(x)=0{,}25(x+1)(4x^2-20x+25)=0{,}25(4x^3-16x^2+5x+25)$

$f(x)=x^3-4x^2+1{,}25x+6{,}25$

$f'(x)=3x^2-8x+1{,}25$, $f''(x)=6x-8$

$f'(x)=0$: $3x^2-8x+1{,}25=0$, $x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-15}}{6}=\frac{8\pm 7}{6}$

$x_1=2{,}5$ $y_1=0$ $x_2=1/6$ $y_2=f(x_2)\approx 6{,}35$

$f'(0)=1{,}25$ $f'(1)=-3{,}75$ $f'(3)=4{,}25$

Damit steigt das Schaubild bis 1/6, fällt bis 2,5 und steigt danach wieder.

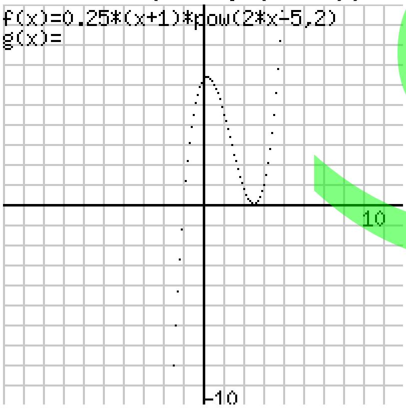
D.h. $H(1/6|f(1/6))$ Hochpunkt, $T(2{,}5|0)$ Tiefpunkt

$f''(x)=0$: $6x-8=0$, $x=4/3$

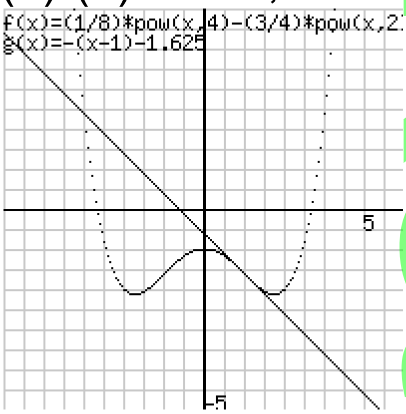
$f''(0)=-8$ $f''(2)=4$

Damit ist das Schaubild bis 4/3 eine Rechtskurve und danach eine Linkskurve.

D.h. $W(4/3|f(4/3))$ Wendepunkt.

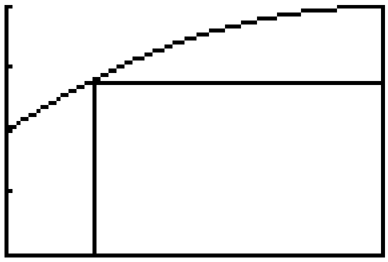


2. Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse und schneidet diese an der Stelle -1. Der Punkt $(1|f(1))$ ist Wendepunkt, die Steigung der entsprechenden Wendetangente ist -1.
Lösung: $f(x)=ax^4+bx^2-1$ (nur gerade Hochzahlen!)
$f'(x)=4ax^3+2bx$, $f''(x)=12ax+2b$
$f'(1)=-1$: $4a+2b=-1$ (1)
$f''(1)=0$: $12a+2b=0$ (2)
(2)-(1): $8a=1$, $a=1/8$ in (1): $b=-0{,}75$, $f(x)=(1/8)x^4-0{,}75x^2-1$



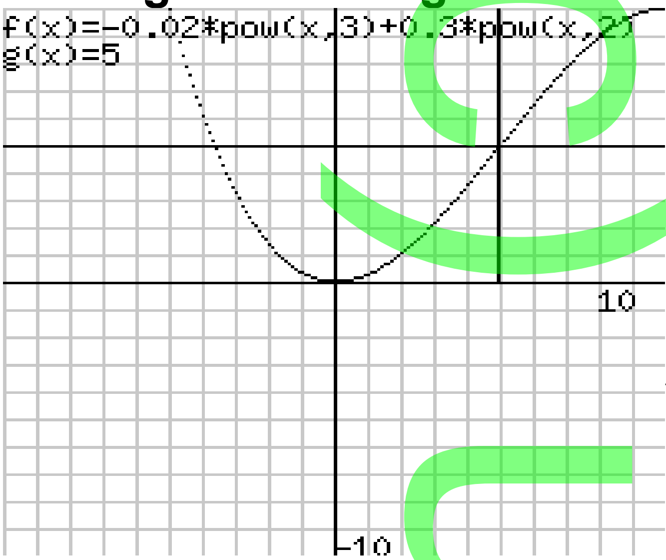
3. Durch $f_t(x)=x^3-tx^2-2t^2x$ ($x \varepsilon R$, $t \varepsilon R$) ist eine Funktionenschar mit Parameter t gegeben.
Die Schaubilder werden mit C_t bezeichnet.
Untersuche C_t in Abhängigkeit von t.
Lösung:
Zunächst liegt der Ursprung auf allen C_t.
$f_t(x)=0$, $x^3-tx^2-2t^2x=0$, $x(x^2-tx-2t^2)=0$, $x_1=0$, $x_{2,3}=0{,}5(t\pm3t)$

$x_2=2t$, $x_3=-t$
Damit gibt es für $t\neq 0$ 3 Schnittpunkte mit der x-Achse.
$f_t'(x)=3x^2-2tx-2t^2$
$3x^2-2tx-2t^2=0$, $x_{4,5}=(2t\pm\sqrt{28}\,t)/6$
$f_t''(x)=6x-2t$
Die Extrempunktprüfung kann meist auch mit der zweiten Ableitung durchgeführt werden:
$f_t''(x_{4,5})=\pm\sqrt{28}\,t$
d.h. $t>0$: $T(x_4|f(x_4))$, $H(x_5|f(x_5))$, $t<0$: $H(x_4|f(x_4))$, $T(x_5|f(x_5))$
$6x-2t=0$, $x=\frac{t}{3}$ $W(\frac{t}{3}|-\frac{20}{27}t^3)$ Wendepunkt
Setzt man noch $x=\frac{t}{3}$, $y=\frac{20}{27}t^3$) und elimiert t, so erhält man $y=20x^3$, die Wendepunktkurve.
4.



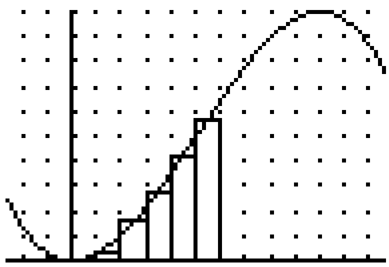
Gezeichnet ist das Schaubild C der Funktion f: $f(x)=-2x^2+4x+2$ ($0\leq x\leq 1$)
Das Rechteck mit dem linken oberen Eckpunkt auf C soll maximalen Inhalt haben.
Lösung: Der Eckpunkt sei $P(u|f(u))$.
Dann gilt $A(u)=(1-u)(-2u^2+4u+2)=2u^3-6u^2+2u+2$
$A'(u)=6u^2-12u+2$, $A''(u)=12u-12$
$A'(u)=0$, $6u^2-12u+2=0$, $u_{1,2}=(12\pm\sqrt{96})/12$,
$u_1\approx 0{,}18$ $u_2\approx 1{,}8$ (nicht im Bereich)
$A'(0)=2$, $A'(1)=-4$ d.h. Auf Grund des Vorzeichenwechsels von A' von positiv auf negativ liegt ein relatives Maximum vor: $A(0{,}18)\approx 2{,}18$
Um zu prüfen, ob ein absolutes Maximum vorliegt, muss eine Randwertprüfung durchgeführt werden.
$A(0)=2$, $A(1)=0$, also ist das Maximum absolut.

2. Integralrechnung:



Die beiden unterteilen jetzt das Grundstück gemäß Skizze.
Zur Bepflanzung müssen sie die Größe der einzelnen Flächenstücke berechnen. Auf Grund der Symmetrie genügt es, das vom Weg, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung x=5 begrenzte Flächenstück zu berechnen.

Uwe weiß noch, dass man Integralrechnung anwenden muss, hat aber vergessen, wie das geht.
Eine ungenaue Methode wäre, die Karos zu zählen, wobei die angeschnittenen nur halb zählen: 8m².
Genauer: Man unterteilt das Intervall [0; 5] in Teilintervalle der Breite Δx und multipliziert mit dem Funktionswert in der Mitte des Teilintervalls.
$\int_0^5 Y1dx \approx 1 \cdot f(0,5)+1 \cdot f(1,5)+1 \cdot f(2,5)+1 \cdot f(3,5)+1 \cdot f(4,5)+1 \cdot f(5,5)$
$=9,3125$
wäre der erste Schritt. Wenn man die Rechtecke mit den Seiten 1,f(0,5) bis 1,f(5,5) aneinandersetzt, sieht man, dass der Flächeninhalt angenähert wird.



Genauer wird es natürlich mit Δx=0,1 (0,01; 0,001; …), was für einen Computer kein Problem ist.

Ute erinnert sich, dass es auch etwas mit der Ableitung zu tun hat und zwar mit deren Umkehrung. Das bringen sie aber beim besten Willen nicht mehr zusammen und beschließen in der Formelsammlung nachzusehen:

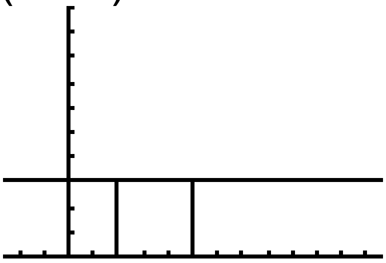
$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ mit $F'(x)=f(x)$

(F Stammfunktion von f)

Daher gilt für Potenzfunktionen

$\int_a^b x^n dx=[\frac{1}{n+1}x^{n+1}]_a^b$, wie man durch Ableiten bestätigt.

($n\neq-1$)



Man kann sich die Formel mit der einfachen Funktion f: $f(x)=3$ klarmachen.

$F(x)=3x$, $A=[3x]_2^5=3\cdot5-3\cdot2=9$

Bei obiger Formel muss man noch beachten, dass unterhalb der x-Achse liegende Flächen negativ herauskommen.

Sie probieren die gefundene Formel gleich aus:

$\int_0^5 (-0{,}02x^3+0{,}3x^2)dx=[-0{,}02\cdot\frac{1}{4}x^4+0{,}3\cdot\frac{1}{3}x^3]_0^5=$

$[-0{,}02\cdot\frac{1}{4}5^4+0{,}3\cdot\frac{1}{3}5^3]-[-0{,}02\cdot\frac{1}{4}0^4+0{,}3\cdot\frac{1}{3}0^3]=9{,}375$

In der Formelsammlung finden Sie dann noch weitere Formeln für:

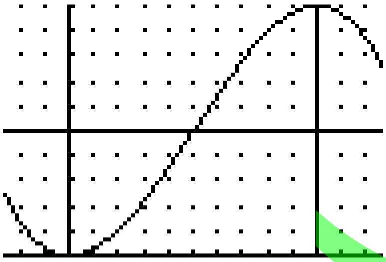
Fläche zwischen Kurven $A=\int_a^b (o(x)-u(x))dx$

dabei steht o für oben, u für unten, Lage x-Achse egal.

Rauminhalt von Drehkörpern und $\pi\int_a^b f(x)^2dx$

dabei rotiert das Schaubild von f um die x-Achse

Mittelwert von Funktionen über dem Intervall [a;b]



$m=(\int_a^b f(x)dx)/(b-a)$

Der Mittelwert von f über das Intervall [0; 10] wäre hier 5. (vgl. Geschwindigkeit)

Des weiteren gelten folgende einleuchtende Formeln:

$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

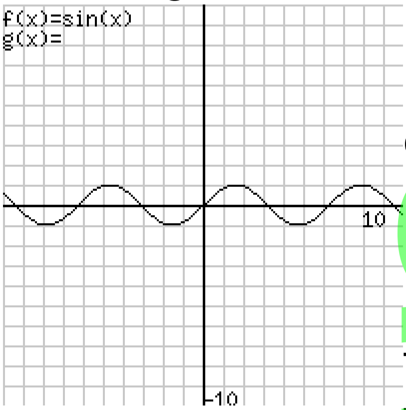
$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

3. Transzendente Funktionen (sin-, cos-, e-Funktion)

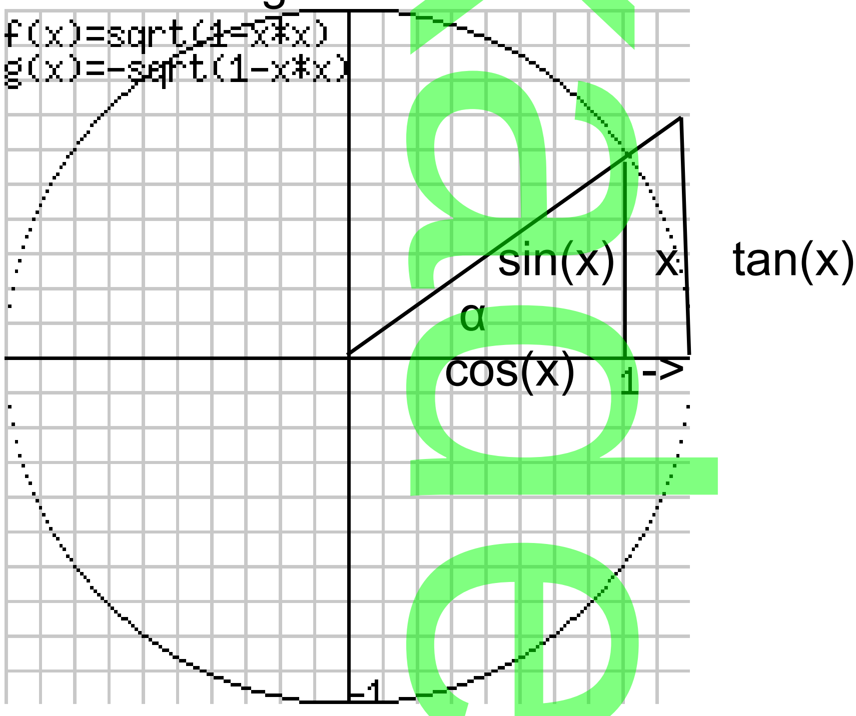
Bei ihrem zweiten Auftrag sollen sie ein Spielgelände mit einer „halfpipe“ und einer Rutschbahn realisieren.
Da muss es doch etwas Einfaches auf dem GTR geben, das sie vielleicht nur leicht variieren müssen.
Das Folgende muss man jeweils als Geländeprofil sehen.



Die Funktion f: f(x)=sin(x) hätte den richtigen Krümmungsverlauf, wenn man einen der Bögen unter der x-Achse betrachtet.
Er reicht von π bis 2π (π=3,14...)
Die Stellen, an denen das Schaubild von f die x-Achse trifft heißen Nullstellen von f.

Der erste Hochpunkt/Tiefpunkt mit positivem x-Wert lautet H(0,5π|1)/T(1,5π|-1).
Als wichtigste Neuerung zu ganzrationalen Funktionen gibt es hier eine Periode: f(x+2π)=f(x)

Zur Ableitung der Sinusfunktion:



Zunächst gilt für den Bogen x, den der Winkel α aus dem Einheitskreis ausschneidet: x= $\frac{\alpha}{360°}$ ·2π

Es handelt sich um das Bogenmaß von α.
Es gilt:

sin(x)<x<tan(x)= $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ |:sin(x)

1< $\frac{x}{\sin(x)}$ < $\frac{1}{\cos(x)}$ |Kehrwert

1> $\frac{\sin(x)}{x}$ >cos(x)

x→0: $\frac{\sin(x)}{x}$ →1, da cos(0)=1

Damit gilt $\frac{\sin(0+h)-\sin(h)}{h}$ →1 für h→0, also:

f(x)=sin(x), f‘(0)=1=cos(0).
Allgemein:

$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ →cos(x) für h→0, also [sin(x)]‘=cos(x)

Man benötigt dazu eine ziemlich komplizierte trigonometrische Formel aus der FS.
Eine weitere Ableitungsregel, die man bei transzendenten Funktionen benötigt ist die Produktregel:
Gegeben sind die Funktionen u: u(x) und v: v(x) mit Ableitungen u': u'(x) und v': v'(x) über einem bestimmten Intervall.
Dann gilt: [u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) über dem gegebenen Intervall.
Beweis:
zu zeigen:

$\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$ → u'(x)v(x)+u(x)v'(x) für h→0

(1. Umformung)

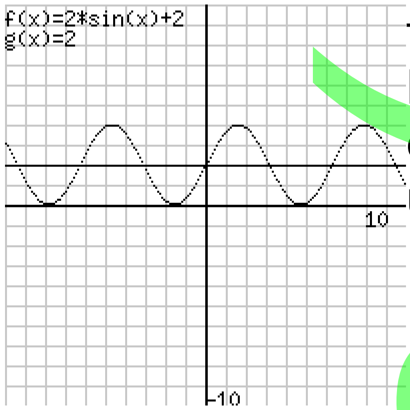
$$\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} =$$

(2. Umformung)

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\,\mathrm{v(x+h)}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\,\mathrm{u(x)}$$

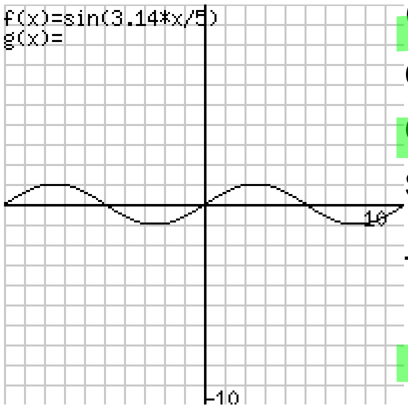
→ u'(x)v(x)+u(x)v'(x) für h→0, gemäß Voraussetzung.
Zusätzlich benutzt wurde: v(x+h)→v(x) ür h→0.
Diese Eigenschaft nennt man Stetigkeit und folgt aus der Ableitbarkeit.
Beispiel:
[x·sin(x)]‘=1·sin(x)+x·cos(x)

Fortsetzung „halfpipe“
Zielvorstellung:
Bahntiefe 2m, Abstand der Bahnränder 5m.



$f(x)=2\sin(x)+2$

Leider ist die Breite einer „Kuhle“ nur etwa 3,14m und soll 5m werden.

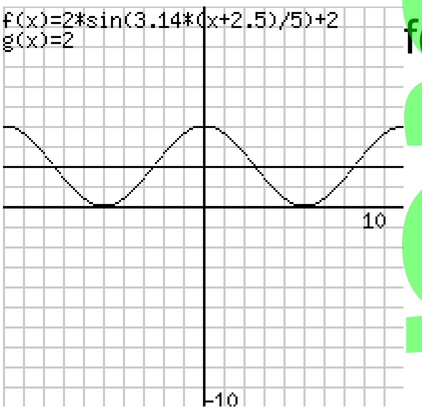


Geometrisch muss eine Streckung orthogonal zur y-Achse mit Faktor 5/π durchgeführt werden.

$\sin(kx)=0 \quad k\cdot 5=\pi \qquad k=\pi/5$

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{5}x)$

Jetzt muss die Bahn noch 2,5 nach links verschoben werden, was erreicht wird, wenn man x durch x+2,5 ersetzt. Alles zusammen:



$f(x)= 2\sin(\frac{\pi}{5}(x+2,5))+2$

Um die erforderliche Betonmenge zu berechnen, benötigt man die Fläche:

$\int_0^{10} f(x)dx$

Dazu benötigt man zunächst die vorläufig letzte Ableitungsregel:

[sin(kx)]‘=cos(kx)·k

Begründung:

y=u(v(x))

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow u'(v(x)) \cdot v'(x)$ für $\Delta x \rightarrow 0$

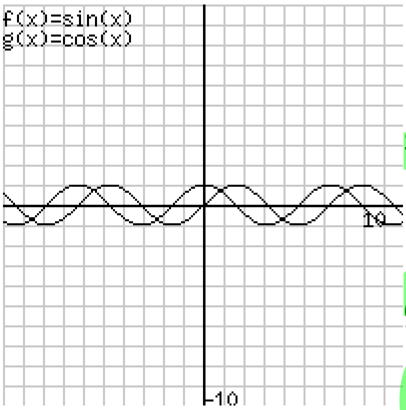
y‘=u‘(v(x))·v‘(x)

(man beachte, dass der u‘ die Ableitung nach v bedeutet)

In obigem Beispiel wäre v(x)=kx, u(v)=sin(v), u‘(v)=cos(v)

Damit kann auch die cos-Funktion abgeleitet werden.

$[\cos(x)]' = [\sin(x+\frac{\pi}{2})]' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$



Die zum Ursprung symmetrische Kurve ist die Sinuskurve, die zur y-Achse symmetrische Kurve ist die Kosinuskurve. Die Kurven sind um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben.

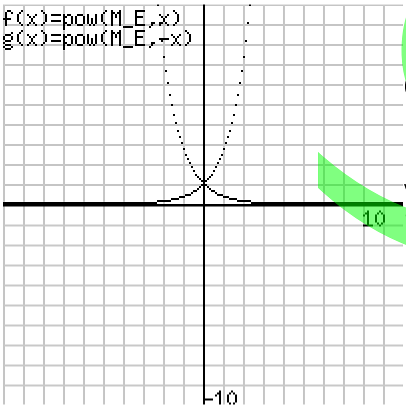
Damit kann endlich obiges Integral berechnet werden, wobei zunächst die Stammfunktionen zu

f(x)=sin(kx) durch $F(x) = -\frac{1}{k}\cos(kx)+c$ gegeben sind.

$\int_0^{10} (2\sin(\frac{\pi}{5}(x+2{,}5))+2)dx = [-2\frac{5}{\pi}\cos(\frac{\pi}{5}(x+2{,}5))+2x]_0^{10} =$

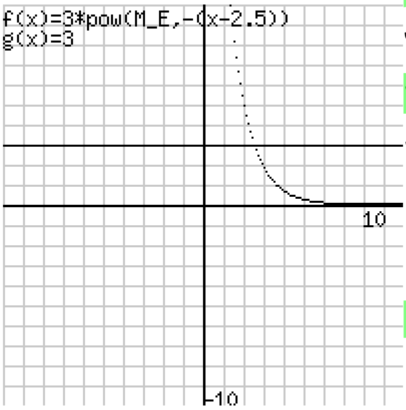
$[-2\frac{5}{\pi}\cos(\frac{\pi}{5}(12{,}5))+20]-[-2\frac{5}{\pi}\cos(\frac{\pi}{5}(2{,}5))] \approx 7{,}2$

Zur Rutschbahn:



Das steigende Schaubild gehört zu e^{x}, das fallende zu e^{-x}.
Die Schaubilder liegen symmetrisch zur y-Achse.

Diese wollen sie zu Ehren des großen Mathematikers Euler mit Hilfe der Funktion $f(x)=e^{x}$ konstruieren; damit wird der Auslauf langsamer.



Jetzt müssen wir nur noch auf die Starthöhe 3m gehen und dann das Schaubild um 2,5 m nach rechts schieben.
$h(x)=3e^{(-(x-2,5))}$

Die wichtigste Eigenschaft betrifft die Ableitung und damit auch die der Stammfunktion:
$f(x)=e^{x}$ $f'(x)=e^{x}$ $F(x)=e^{x}$ (einfacher geht es nicht!)
wie schon bei sin:
$g(x)=e^{kx}$ $g'(x)=ke^{kx}$ $G(x)=\frac{1}{k}e^{kx}$
Übung:
Es soll der Punkt berechnet werden, der auf der Höhe 1,5 m liegt.
$3e^{(-(x-2,5))}=1,5|3$ $e^{(-(x-2,5))}=0,5|\ln$(logarithmus naturalis)
$-(x-2,5)=\ln(0,5)$ $x=2,5-\ln(0,5)\approx 3,2$

Zum Logarithmus: Der Logarithmus von x zur Basis e ist die Zahl, mit der man e potenzieren muss um x zu erhalten, $e^{\ln(x)}=x$.
Logischerweise gilt dann $\ln(e^x)=x$, was bei der Lösung obiger Gleichung benutzt wurde.

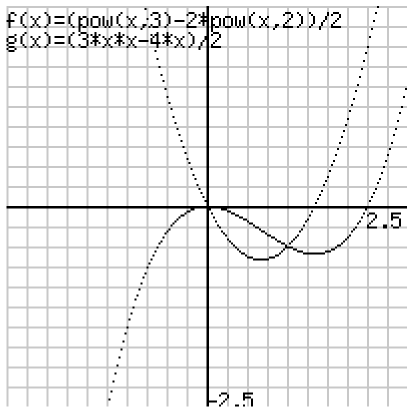
Übung:
Es werden alle 2 Schaubilder gezeigt von denen eines das Schaubild der Funktion, das andere das Schaubild der Ableitungsfunktion (einer Aufleitungfunktion) ist.
Zur Zuordnung betrachtet man die Funktionswerte und Tangentensteigungen an einer bestimmten Stelle und füllt folgende Tabelle aus:

Schaubild	C1	C2
Funktionswert	$f_1(u)$	$f_2(u)$
Ableitungswert	$f_1'(u)=f_2(u)$	$f_2'(u)=f_3(u)$
Zuordnung	f	f'
oder	F	f

Hinweis: Die Stelle u ist meist eine Nullstelle und muss mit Vorzeichenwechsel notiert werden, also -0+, +0-, -0-, +0+. Die Zuordnung kann erst getroffen werden, wenn die Tabelle obiges Aussehen hat. (2 Möglichkeiten)

$f(x)=0{,}5x^3-x^2$, $g(x)=1{,}5x^2-2x$ (die Terme sind nicht bekannt!)
Für x=0 gilt:

Schaubild	C1	C2
Funktionswert	-0-	+0-
Ableitungswert	+0-	---
Zuordnung	f	f'
oder	F	f



Übungen:

1. Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades enthält die Punkte A(0|0), B(2|4) und C(3|3).

a) Stellen sie einen Funktionsterm auf.

b) Die Gerade (BC) und das Schaubild begrenzen ein Flächenstück. Berechne den Flächeninhalt.

Lösung:

a) $f(x)=ax^2+bx$

$f(2)=4$: $4a+2b=4$ (1)

$f(3)=3$: $9a+3b=3$ (2)

(1)·9+(2)(-4): $6b=24$, $b=4$, in (1): $a=-1$

$f(x)=-x^2+4x$

b) (BC): $y=-(x-2)+4=-x+6$

$\int_2^3[(-x^2+4x)-(-x+6)]dx=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx=[-x^3/3+2{,}5x^2-6x]_2^3=$

$[-9+22{,}5-18]-[-8/3+10-12]=-4{,}5+14/3=1/6$

2. Das Schaubild der Funktion f: $f(x)=-x^2+4x$, $0\le x\le 4$, und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück.

a) Das Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne den Rauminhalt.

b) Berechne den Mittelwert der Funktion bezogen auf das Definitionsintervall.

Lösung:

a) $V=\pi\int_0^4(-x^2+4x)^2dx=\pi\int_0^4(x^4-8x^3+16x^2)dx=$

$\pi[0{,}2x^5-2x^4+16x^3/3]_0^4\approx 107{,}2$

b) $m=\int_0^4(-x^2+4x)dx/4=[-x^3/3+2x^2]_0^4=8/3$

3. Gegeben ist die Funktion f: $f(x)=2\cdot e^{-0{,}5x}$, $x\ge 0$.

a) Die Koordinatenachsen und die Gerade $x=2$ begrenzen ein Flächenstück. Berechne den Flächeninhalt.

b) Die Gerade aus a) wird jetzt nach rechts verschoben.

Welche Werte kann das entsprechnende Flächenstück annehmen?

Lösung:

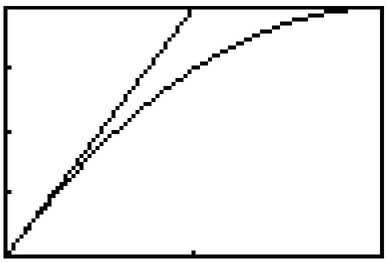
a) $\int_0^2 2\cdot e^{-0,5x}\,dx=[-4\cdot e^{-0,5x}]_0^2=[-4\cdot e^{-1}]-[-4]\approx 2,5$

b) $A(u)=\int_0^u 2\cdot e^{-0,5x}\,dx=[-4\cdot e^{-0,5x}]_0^2=[-4\cdot e^{-u}]-[-4]=$

$A(u)=4(1-e^{-u})\rightarrow 4$ für $u\rightarrow\infty$, da $e^{-u}\rightarrow 0$ für $u\rightarrow\infty$.

A(u) nimmt alle Werte zwischen 0 und 4 an.

4.



Das Schaubild einer quadratischen Funktion f berührt im Ursprung die Gerade mit der Gleichung y=4x und geht durch (2|4).

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Schaubild und den Geraden mit den Gleichungen y=4x und y=4.

c) Berechnen Sie den mittleren Funktionswert von f für das Intervall [0; 2].

d) Das Flächenstück begrenzt vom Schaubild von f, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung x=2 rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie den Inhalt des Rotationskörpers.

Lösung:

a) $f(x)=ax^2+bx+c$ $f'(x)=2ax+b$

Bedingung 1: $f(0)=0$, $c=0$

Bedingung 2: $f'(0)=4$, $b=4$

Bedingung 3: $f(2)=4$, $4=4a+8$, $a=-1$

$f(x)=-x^2+4x$

b) Schnitt der Geraden: $4x=4$, $x=1$

$A=\int_0^1[(4x-(-x^2+4x)]dx+\int_1^2[(4-(-x^2+4x)]dx$

$A=\int_0^1[8x+x^2]dx+\int_1^2[(4+x^2-4x)]dx$

$A=[4x^2+x^3/3]_0^1+[4x+x^3/3-2x^2]_1^2$

$A=4+1/3+8+8/3-8-(4+1/3-4)=20/3$

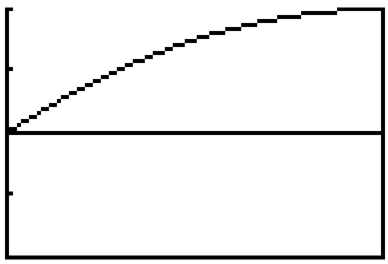
c) $\int_0^2[-x^2+4x]dx=[-x^3/3+2x^2]_0^2=-8/3+8=16/3$

Das Ergebnis muss noch durch die Intervalllänge 2 dividiert werden, also Mittelwert 8/3.

d) $V=\pi\int_0^2[-x^2+4x]^2dx=\pi\int_0^2[x^4-8x^3+16x^2]dx=$

$V=\pi[x^5/5-2x^4+16x^3/3]_0^2=\pi(32/5-32+128/3)=256\pi/15$

5.



Gezeichnet ist das Schaubild C der Funktion f: $f(x)=-2x^2+4x+2$ $(0\le x\le 1)$

Das Flächenstück begrenzt von C , den Geraden y=2 und x=1den Achsen rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie den Rauminhalt des Drehkörpers.

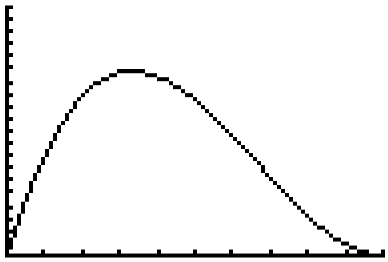
Lösung:

$V=\pi\int_0^1[-2x^2+4x+2]^2dx-\pi\int_0^1[2]^2dx$

Da die Integrationsgrenzen übereinstimmen, kann man zusammenfassen.

$V=\pi\int_0^1[(-2x^2+4x+2)^2-2^2]dx=...=112\ \pi/15$

6.



Gezeichnet ist das Schaubild der Funktion f: $f(x)=0{,}1x(x-10)^2$ $(0\le x\le 10)$.

Es soll einen Beschleunigungsvorgang darstellen mit x in Sekunden und f(x) in Meter/Sekunde.

a) Berechnen Sie die Anfangsbeschleunigung.

b) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit.

c) Nach welcher Zeit ist die Bremswirkung am größten?

d) Berechnen Sie den Gesamtweg der Bewegung.

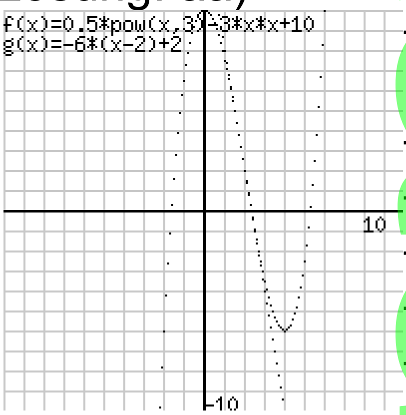
Lösung:

a) $f(x)=0{,}1x^3-2x^2+10x$, $f'(x)=0{,}3x^2-4x+10$, $f'(0)=10$

Anfangsbeschleunigung $10m/s^2$

b) $f'(x)=0$, $x=3{,}4$s, Geschwindigkeitsmaximum 14,8m/s
c) $f''(x)=0{,}6x-4$, $x=6{,}7$s, max. Bremsverzögerung $-3{,}3\,m/s^2$
d) $s=\int_0^{10}[0{,}1x^3-2x^2+10x]dx=[0{,}025x^4-2x^3/3+5x^2]_0^{10}=83{,}3(m)$

7. Gegeben ist die Funktionenschar mit reellem Parameter t,
f_t: $f_t(x)=0{,}5x^3-3tx^2+4(t^2-1)x+10t^2$ ($x\varepsilon R$), Schaubild K_t.
aa) Zeichne K1 für $-2\leq x\leq 6$. Verwende hierzu die Extrempunkte, den Wendepunkt (mit Wendetangente) und die Punkte mit ganzzahliger x-Koordinate.
ab) Welche Geraden durch den Schnittpunkt von K_1 mit der y-Achse haben mit K_1 genau einen weiteren Punkt gemeinsam?
ba) Zeige, dass K_t stets Extrempunkte besitzt.
bb) Stelle eine Gleichung für die Ortskurve der Wendepunkte auf.
bc) Bestimme t so, dass das Schaubild einer Stammfunktion F_t von f_t an der Stelle $x=-4$ eine Wendestelle besitzt.
bd) Bestimme t so, dass das Schaubild einer Stammfunktion F_t von f_t im Punkt (0|20) die Steigung 10 hat. Geben Sie eine dieser Stammfunktionen an.
Lösung: aa)



$f_1(x)=0{,}5\cdot x^3-3\cdot 1\cdot x^2+4\cdot(1^2-1)\cdot x+10\cdot 1^2$
(Achtung: „Malpunkte“ einfügen!)
$f_1(x)=0{,}5\cdot x^3-3\cdot x^2+4\cdot 0\cdot x+10\cdot 1^2$
$f_1(x)=0{,}5\cdot x^3-3x^2+0\cdot x+10\cdot 1$
$f_1(x)=0{,}5x^3-3x^2+10$
$f_1'(x)=1{,}5x^2-6x$, $f_1''(x)=3x-6$, $f_1'''(x)=3$
$f_1'(x)=0$: $1{,}5x^2-6x=0$ … $x_1=0$, $x_2=4$
$f_1''(0)=-6$, H(0|10), $f_1''(4)=6$, T(4|-6)
$f_1''(x)=0$: $3x-6=0$, $x_3=2$ $f_1'''(2)=3$, W(2|2), $f_1'(2)=-6$
ab) Man betrachte die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt $P(u|f_1(u))$:
$y=f_1'(u)(x-u)+f_1(u)$ und setze für $x=0$ und $y=10$

$10=(1{,}5u^2-6u)(-u)+0{,}5u^3-3u^2+10$, $-u^3+3u^2=0$, $u_1=0$, $u_2=3$

Es kommt nur $u_2=3$ in Frage, $f_1'(3)=-4{,}5$, $y=-4{,}5x+10$

ba) $f_t'(x)=1{,}5x^2-6tx+4(t^2-1)=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a} \quad a=1{,}5\ b=-6t,\ c=4(t^2-1)$$

$$x_{1,2}=\frac{6t\pm\sqrt{36t^2-24(t^2-1)}}{3}=\frac{6t\pm\sqrt{12t^2+24}}{3}$$

Da $12t^2+24>0$, gibt es immer 2 Lösungen, wobei es sich bei einer Wendeparabel um Extrempunkte handeln muss.

bb) $f_t''(x)=3x-6t=0$, $x=2t$, $y=10t^2-8t$, $W(2t|10t^2-8t)$.

Man setzt $t=0{,}5x$ in $y=10t^2-8t$ und erhält $y=2{,}5x^2-4x$.

bc) $F_t'(x)=f_t(x)$, $F_t''(x)=f_t'(x)=1{,}5x^2-6tx+4(t^2-1)$

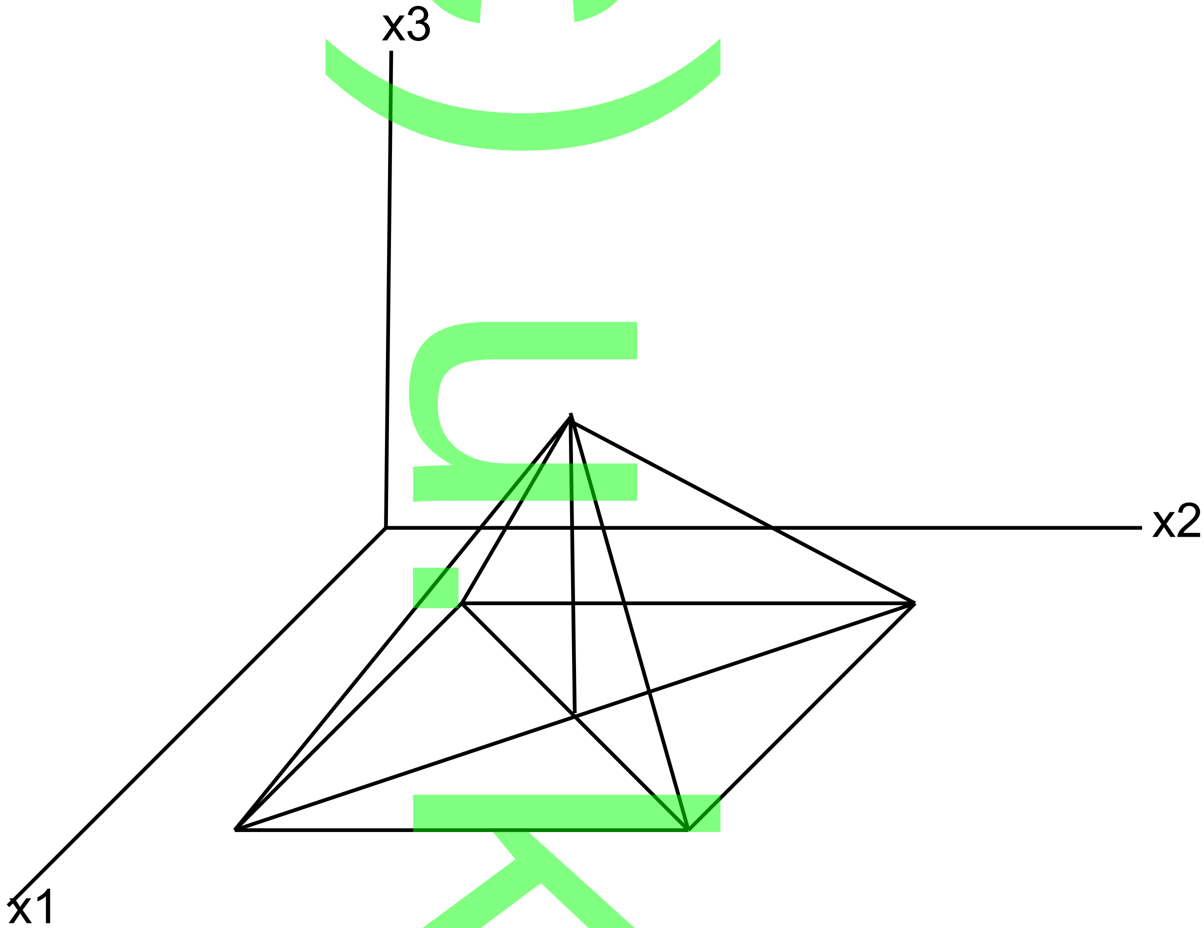
$F_t''(-4)=0$, $20+24t+4t^2=0$, $t_1=-1$, $t_2=-5$

bd) $F_t'(0)=f_t(0)=10t^2=10$, $t_3=-1$, $t_4=1$

$F1(x)=0{,}125x^4-x^3+10x+20$

Bei ihrem nächsten Auftrag sollen sie eine Pyramide realisieren, was sich nach Geometrie anhört.

4. Vektorrechnung



Als Uwe Ute die Grafik zeigt staunt sie nicht schlecht. Nachdem Uwe sich als Geometrieversteher geoutet hat, beginnt er mit der Erklärung.

Man muss sich ein räumliches Koordinatensystem vorstellen.
Die übliche x-Achse wird zur x_2-Achse, die übliche y-Achse zur x_3-Achse.
Die negative x_1-Achse ist die erste Winkelhalbierende.
Normalerweise hat man auf x2- und x3-Achse gleiche Einheit und auf der x1-Achse das $\sqrt{2}$-fache davon.
Man stelle sich vor, dass die x_3-Achse nach oben und die x_1-Achse vorn zeigt.

Die Achsen stehen paarweise senkrecht aufeinander.
Das ist insofern nichts Besonderes, da wir ja dauernd in einem räumlichen Koordinatensystem sitzen. Wir blicken sozusagen in die linke untere Zimmerecke.
Um einen Punkt ($x_1|x_2|x_3$) in das Standardkoordinatensystem einzutragen, muss man also (x_2-0,5x_1|x_3-0,5x_1) ins zugehörige xy-Koordinatensystem eintragen.
A(8|2|0)->(-2|-4) B(8|8|0)->(4|-4) C(2|8|0)->(7|-1)
D(2|2|0)->(1|-1) M(5|5|0)->(2,5|-2,5) S(5|5|4)->(2,5|1,5)
In einem anderen Koordinatensystem muss der Punkt mittels Ortsvektor (s.u.) eingetragen werden.

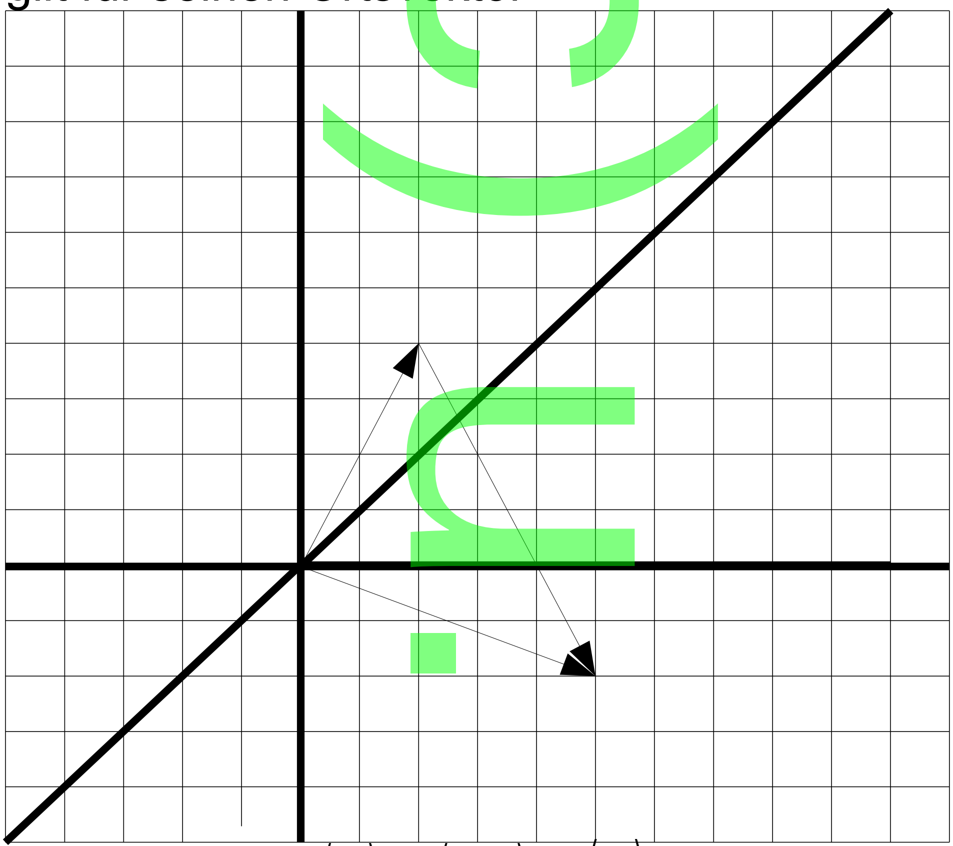
Geraden und Ebenen
In der räumlichen Geometrie spielen neben Geraden auch Ebenen eine Rolle. Beide Objekte werden durch Vektoren erfasst.
Dabei ist ein Vektor ein vertikales Zahlentripel, in welchem eine Parallelverschiebung der Punkte des Raumes kodiert ist.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ d.h. 2 in x_1-Richtung, 4 in x_2-Richtung, -5 in x_3-Richtung.

$\vec{v}$ ((2|3|5))=(4|7|0); so schreibt man dies aber nicht.
Zunächst wird jedem Punkt P ein Ortsvektor zugeordnet, der die Verschiebung des Ursprungs O zu diesem Punkt angibt:

P(2|3|5)-> $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bezeichnet man den durch $\vec{v}$ verschobenen Punkt mit Q, so gilt für seinen Ortsvektor

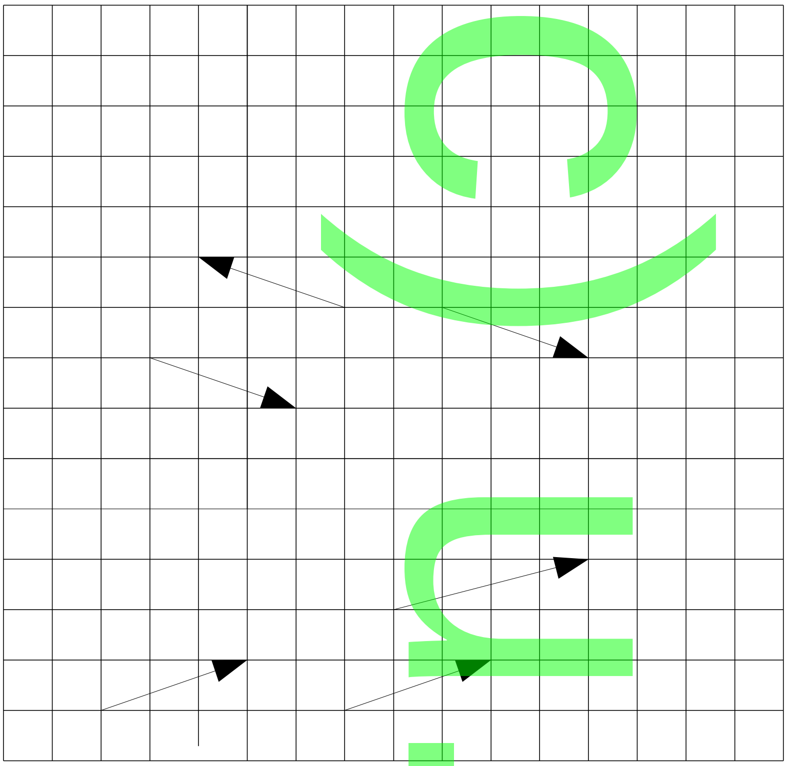


$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

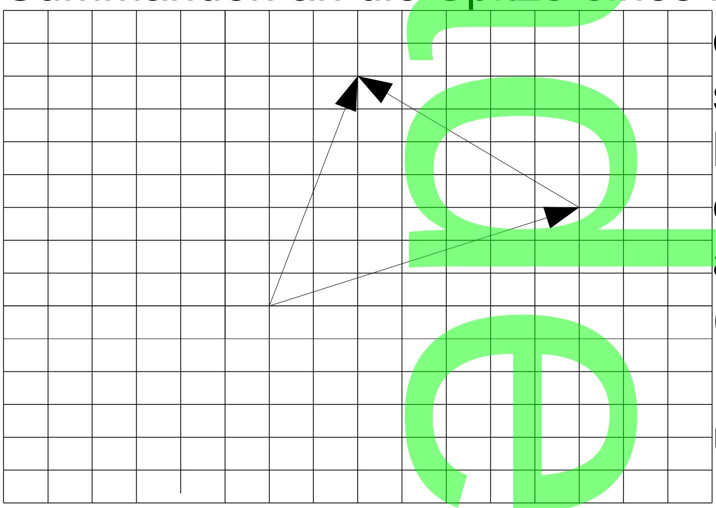
Q(4|7|0)->(5|-2)

allgemein: $P(p_1|p_2|p_3)$ $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + v_1 \\ p_2 + v_2 \\ p_3 + v_3 \end{pmatrix}$$ $Q(p_1+v_1|p_2+v_2|p_3+v_3)$

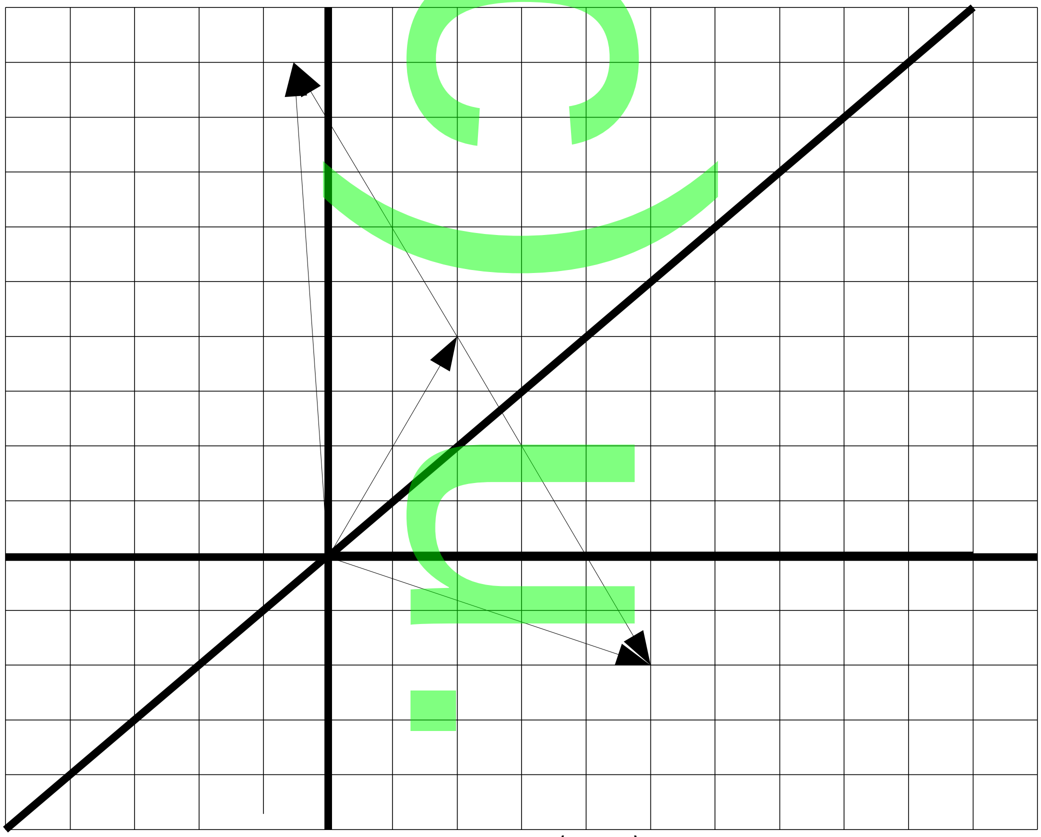


Geometrisch stelle man sich als Repräsentanten von Vektoren Pfeile vor. Parallele, gleich lange und gleich orientierte Pfeile repräsentieren den gleichen Vektor.
Die Bsp-Pfeile zeigen jeweils zum Nachfolgebuchstaben:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{EF}$ (entgegengesetzte Orientierung)
$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IJ} \neq \overrightarrow{KL}$ (entgegengesetzte Orientierung)
Einen Pfeil für die Summe zweier Vektoren erhält man, indem man einen Pfeil des zweiten Summanden an die Spitze eines Pfeils



des ersten Summanden setzt. Der Summenpfeil hat seinen Anfang am ersten und seine Spitze am zweiten Pfeil.
(Physik: $\overrightarrow{AC}$ Resultierende von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$)
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Vektoren können auch subtrahiert werden:



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Mit $-\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ kann statt der Subtraktion

auch eine Addition durchgeführt werden:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + (-\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$-\vec{v}$ heißt Gegenvektor von $\vec{v}$, seine Komponenten sind entgegengesetzt zu denen von $\vec{v}$.
Ein Vektor wird subtrahiert, indem sein Gegenvektor addiert.
Die Pfeile von $-\vec{v}$ erhält man, indem man bei den $\vec{v}$-Pfeilen die Spitzen und Anfang vertauscht.

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Setzt man A=O, so hat man die wichtige Verbindungsvektorformel
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$
Bsp.: B(2|3|5)->C(4|7|0)

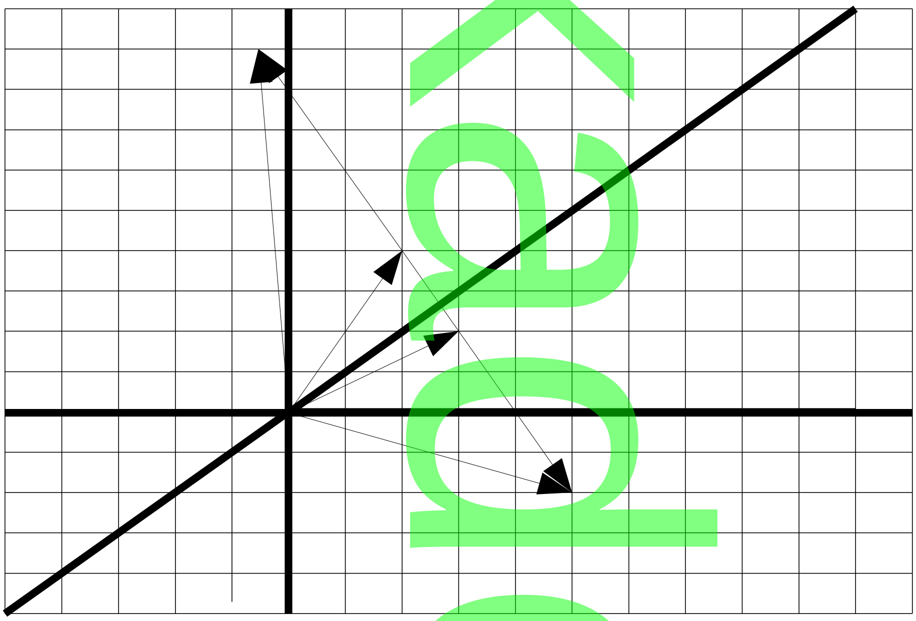
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

allgemein: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{pmatrix}$

Eine Besonderheit ergibt die Addition von Vektor und Gegenvektor:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$ ...Nullvektor

Gerade:



Jetzt erhält man die Gerade g=(PQ):
$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ mit dem reellen Parameter t

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die Geradenpunkte lauten X(2+2t|3+4t|5-5t)->(2+3t|4-6t)

$\overrightarrow{OP}$ heißt Stützvektor,

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Richtungsvektor von g.

Hier kommt eine weitere Vektorrechnungsart, die Multiplikation mit einer reellen Zahl zur Anwendung.

$$t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ -5t \end{pmatrix}$$

Geometrisch werden die Pfeile des Vektors einfach mit dem Faktor t gestreckt:

$\overrightarrow{PX} = t\,\overrightarrow{PQ}$

Hinweis: Für die Vektorrechnung gelten die üblichen Rechenregeln, da ja komponentenweise gerechnet wird.

Besonderheiten: t=0: $0 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$ ... Nullvektor

t=-1: $-1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} = -\vec{v}$ Gegenvektor von $\vec{v}$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o}$

Um einen Punkt auf einer Geraden zu berechnen setzt man einen Wert für den Parameter ein und berechnet den zugehörigen Ortsvektor:

t=0,5 in $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ eingesetzt: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ R(3|5|2,5)

(Mittelpunkt von PQ, wg t=0,5)
Um zu testen, ob der Punkt T(1|3|2) auf der Geraden liegt, muss man seinen Ortsvektor mit dem Geradenterm gleichsetzen:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,|- \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ersichtlich gibt es hier keinen eindeutigen t-Wert (-0,5 oder 0 oder 0,6), also liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

Um eine Beleuchtung der obigen Pyramide zu erreichen, soll auf der x_3-Achse ein Strahler angebracht werden. Um eine günstige Position zu bekommen benötigt man den Schnittpunkt von (BS) mit der x_3-Achse.

x_3-Achse: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(BS): $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

zu beachten ist, dass man hier mit verschiedenen Parametern arbeiten muss.
Logischerweise verwendet man hier das Gleichsetzungsverfahren:

$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dieser Vektorgleichung entsprechen die 3 gewöhnlichen Gleichungen

8-3s=0t
8-3s=0t
0+4s=t
aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich s=8/3
eingesetzt in die letzte Gleichung: t=32/3
damit lautet der Ortsvektor des gesuchten Schnittpunkts

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 32/3 \end{pmatrix}$$

und der Punkt (0|0|32/3)
Ab dieser Höhe beleuchtet der Strahler die ganze Pyramide; darunter gibt es einen Schatten.
Ü:
C(1|1,5|3,5)εg:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |- \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t=0{,}5$$

(einheitliches t)
D(1|1|5)$\not\varepsilon$g:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |- \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t1=-0,5 t2=1/3 t3=2 Widerspruch, da verschiedene t-Werte
Hat man 2 Geraden, so können diese identisch sein, was man der Gleichung nicht ansehen muss. Es gibt also nicht <u>die</u> Geradengleichung.
Verschiedene Geraden können sich schneiden, parallel oder windschief sein.
In einem Würfel schneiden sich die Raumdiagonalen, untere und obere Kanten sind entweder parallel oder windschief.
Man prüft dies rechnerisch, indem man die Geradenterme

gleichsetzt. In jedem Fall erhält man ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen, es ist also überbestimmt. Zu beachten ist, dass man bei den Gleichungen verschiedene Parameter wählt. Sollten 2 Geraden mit dem gleichen Parameter angegeben sein, so wähle man verschiedene. (wenn der Parameter die Zeit bedeutet, muss man beidesmal t als Parameter wählen)

Bsp.: g∩h={S} ... g und h schneiden sich in S

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{x}_h \ ...$$

Wir erhalten im allgemeinen ein Gleichungssystem von 3 Gleichungen und 2 Variablen:

2s-3t=-3 (1)
1s-1t=-2 (2)
-2s+5t=1 (3)

Man löst das Gleichungssystem (1), (2) nach dem Additionsverfahren und setzt die Lösungen in (3) ein.

1s-1t=-2 (2)
0s-1t=1 (1)+(-2)·(2)
t=-1 in (2): s=-3 in (3): -2(-3)+5(-1)=1 richtig
eingesetzt in einen der Terme: S(3|2|6)

Bsp.: g∩h={} ... g und h schneiden sich nicht

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{x}_h \ ...$$

Lösung:

-2,5s- 5t =-2 (1)
-5s-10t=-4 (2)
3s+6t =0   (3)

-2,5s- 5t =-2 (1)
-s- 2t=-0,8 (2)/5
s+2t= 0 (3)/3

Addiert man die beiden letzten Gleichungen, erhält man den Widerspruch 0=-0,8

Auf Grund des Widerspruchs gibt es keine gemeinsamen Punkte.

Da ihre Richtungvektoren linear abhängig (ein Vektor Vielfaches des anderen) sind, sind die Geraden parallel und verschieden.

Bsp.: g=h

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6{,}4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{x}_h \; .. \; \begin{pmatrix} -2{,}5\,s - 5t = -2 \\ -5s - 10t = -4 \\ 3s + 6t = 2{,}4 \end{pmatrix}$$

Die 3 Gleichungen sind äquivalent zu s+2t=0,8.
Es gibt also unendlich viele Lösungen.
Damit sind die Geraden identisch.

-2,5s-5t=-2 (1)
-5s-10t=-4   (2)
3s+6t=2,4   (3)

Dividiert man die erste Gleichung durch -2,5, die zweite durch -5, die dritte durch 3, so erhält man jeweils s+2t=0,8

Bsp.: g∩h={} ... g und h schneiden sich nicht

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{x}_h \; \ldots$$

(1) 2s-3t=-3
(2) 1s-1t=-2
(3) -2s+5t=0 ...   (1)+(3): t=-1,5 in (3): s=-3,75 in (2): Wid.
es gibt keine gemeinsame Punkte, die Richtungsvektoren sind linear unabhängig (keiner ist Vielfaches des anderen) , die Gerade sind windschief.

2s-3t=-1 (1)
1s-1t=-2 (2)
-2s+5t=0(3)
1s-1t=-2 (2)
0s-1t= 1 (1)+(-2)(2): t=-1, in (2) s=-3, in (3) 6-5=0 Wid.

Nächstes Problem:
Bei obiger Pyramide soll von MS ein Balken sein. In der Höhe 2 sollen orthogonale Stützen zu den Kanten angebracht werden.
Wir bestimmem den Abstand des Punktes H(5|5|2) von (BS).
Abstandsaufgaben: erfordern den Betrag eines Vektors:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $|\vec{v}|=\sqrt{(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}$ ... räumliche Pythagorasformel

Für den Abstand zweier Punkte P und Q gilt dann

$|\overrightarrow{PQ}|=\left|\begin{pmatrix} q_1-p_1 \\ q_2-p_2 \\ q_3-p_3 \end{pmatrix}\right|=\sqrt{((q_1-p_3)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2)}$ vgl. 2d-Formel

(BS): $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ X(8-3t|8-3t|4t)

$\overrightarrow{HX} = \begin{pmatrix} 3-3t \\ 3-3t \\ 4t-2 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{HX}| = \sqrt{(3-3t)^2+(3-3t)^2+(4t-2)^2} =$
$\sqrt{34t^2-52t+22}$

Damit Orthogonalität vorliegt, muss der Abstand minimal sein, d.h.

f(t)=34t²-50t+22 muss minimal sein: f'(t)=68t-52=0 t=13/17 ...

Lotfußpunkt L(97/17|97/17|52/17)

Ergänzung: Orthogonalität von Vektoren

Man betrachte das Dreieck O(0|0|0)A(a_1|a_2|a_3)B(b_1|b_2|b_3)

Die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sollen auf Orthogonalität geprüft werden.

Es muss die Pythagorasgleichung gelten:

$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$ ... $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

Die Beziehung $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ ist ein Sonderfall von

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\,\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}\cos(\alpha)$ für α=90°

und dient der Winkelberechnung zwischen Vektoren,

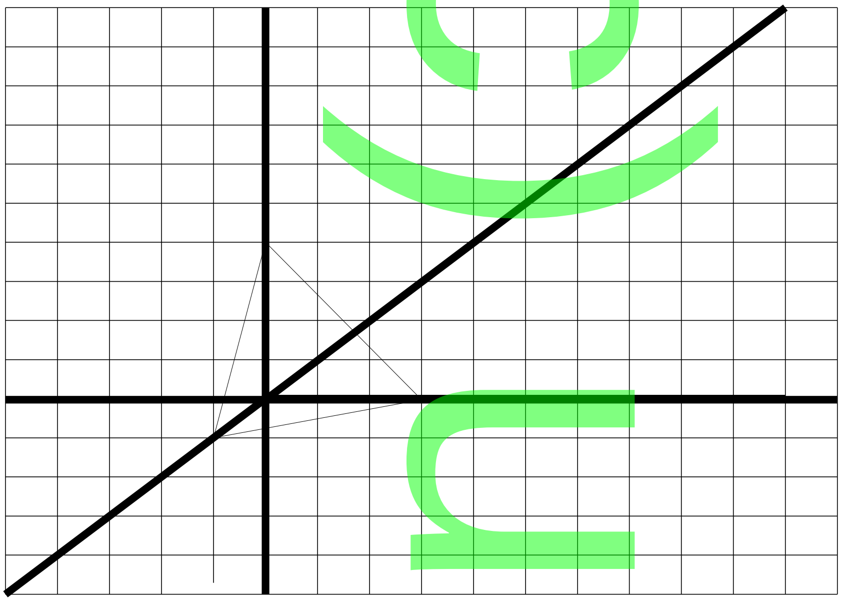
kurz $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)$ … Skalarprodunkt der Vektoren.

(vgl. physikalische Arbeit)

Ein Eingang in die Pyramide soll so sein, dass die Oberkante in der Höhe 2 ist. Dieses Problem löst man am einfachsten mit Ebenen.

Zunächst wieder etwas Theorie.

Ebenen:



Generell ist eine Ebene durch
3 Punkte festgelegt, die ein Dreieck bilden.
(stellt man einen 3-beinigen Hocker auf ebenen Fußboden, so wackelt er nicht!)
Das dargestellte Dreieck hat die Eckpunkte
A(2|0|0) B(0|3|0) und C(0|0|4).

Diese erfüllen die Gleichung $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$ (1)

Die Punkte X mit
$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}$ mit s, tεR liegen auf dieser Ebene.

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\text{ s, t}\varepsilon\text{R}) \ (2)$$

(1) heißt Koordinatengleichung, (2) Parametergleichung der Ebene.
Setzt man in $x_1=2-2s-2t$ $\quad$ $s=x_2/3$ und $t=x_3/4$
x1=2-(2/3)x2-(2/4)x3
so erhält man (1)
Löst man (1) nach x_1 auf und setzt $x_2=s$ und $x_3=t$
$x_1=2-(2/3)s-(2/4)t$, so erhält man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +s \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +t \begin{pmatrix} -2/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zwar nicht (2), aber eine äquivalente Gleichung.
(mit $x_2=3s$ und $x_3=4t$ hätte sich (2) ergeben)

Wir haben also 2 Formen der Ebenengleichung, die man ineinander überführen kann.
(1)->(2) kann als Lösung der Gleichung aufgefasst werden.
(eine Gleichung mit 3 Variablen hat eine 2-parametrige Lösungsmannigfaltigkeit)
(2)->(1) Elimination der Parameter.
Während (1)->(2) unproblematisch und normalerweise unnötig ist, ist (2)->(1) etwas problematischer, da man sich leicht verrechnen kann.
Ü: (SAB) bei obiger Pyramide

(SAB): $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS} +s\, \overrightarrow{SA} +t\, \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} +s \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} +t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

mit reellen Parametern s und t
Bezeichnung: $\overrightarrow{OS}$ heißt Stützvektor, $\overrightarrow{SA}$ und $\overrightarrow{SB}$ heißen Richtungsvektoren der Ebene, die linear unabhängig sein müssen.
Um die Parameter zu eliminieren schreibt man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} +s \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} +t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3s+3t \\ 5-3s+3t \\ 4-4s-4t \end{pmatrix}$$

$x_1=5+3s+3t$(1)
$x_2=5-3s+3t$(2)
$x_3=4-4s-4t$(3)
(1)·4+(3)·3: $4x_1+3x_3=32$ Parametergleichung

Die Parametergleichung enthält x_2 nicht, da die Ebene parallel zur x_2-Achse ist. Normalerweise muss man mit (1) und (2) s und t in Abhängigkeit von x_1 und x_2 bestimmen und in (3) einsetzen.

3s+3t =-5+x1 (1)
-3s+3t=-5-x2 (2)
<u>-4s-4t =-4+x3 (3)</u>
3s+3t =-5+x1 (1)
0s+6t =-10+x1-x2 (1)+(2):
t=(-10+x1-x2)/6 in (1) s=(-5+x1)/3-(-10+x1-x2)/2
in (3) … $x_1+0x_2+(3/4)x_3=8$

[*Anfang]man kann eine weitere Formel anwenden:

In $ax_1+bx_2+cx_3=d$ steht $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ senkrecht auf den

Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ der Ebene.

Dabei gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a2b3-a3b2 \\ a3b1-a1b3 \\ a1b2-a2b1 \end{pmatrix}$, d erhält man anschließend durch Einsetzen des Stützpunkts.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$, $24x_1+0x_2+18x_3=d=120+0+72=194$, $4x_1+3x_3=32$.

[*Ende]

Die Koordinatenebenen haben die Koordinatengleichungen
x_1x_2-Ebene: $x_3=0$
x_2x_3-Ebene: $x_1=0$
x_1x_3-Ebene: $x_2=0$
Um obiges Pyramidentürproblem zu lösen, schneiden wir die

Ebene $x_3=2$ mit der Geraden (BS):: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$0+4s=2 \quad s=0{,}5$

Der Ortsvektor des Schnittpunkts lautet $\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 6{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, der

Schnittpunkt (6,5|6,5|2).
Wenn die Türöffnung auf der Seite ABS sein soll, lautet der Schnittpunkt von (AS) mit x3=2: (6,5|3,5|2).
Die Öffnung soll jetzt unten eine Breite von 2 haben und zwar soll sie unten von (8|4|0) bis (8|6|0) gehen. Dann geht sie oben von (6,5|4,5|2) bis (6,5|5,5|2).
Hinweis zu $g \cap E$: (E sei durch eine Koordinatengleichung gegeben) Wenn man g in die Ebenengleichung einsetzt, gibt es 3 Möglichkeiten.

1. Man kann den Parameterwert bestimmen; wenn man diesen in die Geradengleichung einsetzt, erhält man den Ortsvektor des Schnittpunkts.
2. Der Parameter fällt heraus ...
a) 0=0 g liegt in E b) 0=1 g liegt nicht in E und verläuft parallel zu E. Schließlich kann man auch noch Ebenen miteinander schneiden.

Auf der Pyramide befinde sich ein Stab der Länge 1.

Sonnenlicht strahle in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide.

Die Schattenebene schneidet dann eine der Pyramidenflächen in einer Geraden:

Schattenebene $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} +t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ...

x_1-(2/3)x_2=5/3
x_1+(3/4)x_3=8
am einfachsten ist es x_1=v zu setzen:
x_2=-2,5+1,5v x_3=32/3-4/3v

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ 32/3 \end{pmatrix} +v \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ -4/3 \end{pmatrix}$ wäre Schattengerade

Schnitt mit x3=0: v=8 (8|9,5|0), es wird also die vordere Fläche geschnitten.
Beim Schnitt zweier Ebenen kann es auch wieder zu Parallelität bzw. Identität kommen, was man aber den Koordinatengleichungen sofort ansieht.
Um 3 Ebenen miteinander zu schneiden, schneide man zunächst 2 miteinander.

Hinweise:
1. Um eine Koordinatengleichung einer Ebene durch 3 Punkte kann man auch folgendermaßen vorgehen
Bsp.: P(1|2|2), Q(2|2|1), R(2|1|2)
$ax_1+bx_2+cx_3=1$

P: 1a+2b+2c=1
Q: 2a+2b+1c=1
R: 2a+1b+2c=1 … a=b=c=0,2
$0{,}2x_1+0{,}2x_2+0{,}2x_3=1$
1a+2b+2c=1 (1)
2a+2b+1c=1 (2)
2a+1b+2c=1 (3)
1a+2b+2c=1 (1)
0a-2b-3c =-1 (2)+(-2)(1) : (2')
0a-3b-2c =-1 (3)+(-2)(1) : (3')
1a+2b+2c=1 (1)
0a-2b-3c =-1(2')
0a-3b-2c =-1 (3')
1a+2b+2c=1 (1)
0a-2b-3c =-1(2')
0a+0b+5c=1 2(3')+(-3)(2'): c=0,2 in (2'): b=0,2: in (1): a=0,2

Das Verfahren heißt Gaußscher Algorithmus und beruht darauf, dass sich die Lösung eines linearen Gleichungssystems nicht ändert, wenn man zu einer Gleichung ein Vielfaches einer andere addiert.
Bei 3 Gleichungen mit 3 Variablen ergibt sich im ersten Schritt ein Teilsystem von 2 Gleichungen mit 2 Variablen und im dritten Schritt schließlich eine Gleichung mit einer Variablen.
Sollte die Ebene durch den Ursprung gehen, so muss natürlich rechts 0 stehen.

Trotzdem kommt man mit dem Ansatz durch:
Bsp.: P(1|1|-2), Q(1|-2|1), R(-2|1|1)
P: 1a+1b-2c=1 1 1 -2 1 1 0 -1 0 a-c=0
Q: 1a-2b+1c=1 1 -2 1 1 0 1 -1 0 b-c=0
R: -2a+1b+1c=1 -2 1 1 1 0 0 0 1 d.h. rechts 0 statt 1

c kann jeden Wert außer 0 annehmen, z.B. 1: a=b=c=1

$x_1+x_2+x_3=0$

Sollte die Ebene in Parameterform gegeben sein, so kann man 3 Punkte berechnen, indem man die Parameter einzeln und beide 0 setzt.

Sollte die Ebene mit einer Koordinatengleichung gegeben sein, kann man fogendermaßen eine Parametergleichung erhalten:

$2x_1-3x_2+x_3=4$ $x_1=2+1{,}5x_2-0{,}5x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1{,}5\,x_2-0{,}5\,x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzt man abschließend noch $x_2=s$ und $x_3=t$, hat man die übliche Form.

[*Anfang]2. Um den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu bestimmen bräuchte man einen Ebenennormalenvektor. Erfreulicherweise wird ein solcher mit eine Parametergleichung mitgeliefert:

Bsp.: $2x_1-x_2+3x_3=4$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ wäre ein Normalenvektor.

P(1|2|1) liegt nicht auf der Ebene. Lotgerade

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ …2(1+2t)-(2-t)+3(1+3t)=4 … t=1/14

L(16/14|27/14|17/14) … Lotfußpunkt Abstand $|\overrightarrow{PL}|=\frac{1}{\sqrt{14}}$

Es geht aber einfacher, wenn man die Koordinatengleichung auf die Hessesche Normalform (s.u.) bringt:

$\frac{1}{\sqrt{14}}(2x_1-x_2+3x_3-4)=0$ und den Punkt einfach einsetzt

$\frac{1}{\sqrt{14}}(2\cdot1-1\cdot2+3\cdot1-4)=-\frac{1}{\sqrt{14}}$, dabei kann ein negativer Wert herauskommen, der Abstand ist natürlich positiv.
Den Abstand Punkt/Gerade bestimmt man, indem man die Ebene durch den Punkt mit dem Richtungsvektor der Geraden schneidet.
Bsp.:
Abstand M(5|5|2) von A(8|2|0)S(5|5|4)

$\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}$ $-3x_1+3x_2+4x_3=d$ M eingesetzt d=8

(AS): $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}$ eingesetzt -3(8-3t)+3(2+3t)

+4(0+4t)=8
… t=26/34 eingesetzt L(97/17|73/17|52/17) Lotfußpunkt
Abstand: $|\overrightarrow{ML}|=26\sqrt{34}$

Winkelaufgaben: erfordern
$\cos(\vec{u},\vec{v})=(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)/(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|)$ Skalarproduktformel

Alle Beispiele beziehen sich auf obige Pyramide:
Beispiel: Dreieck A(8|2|0)B(8|8|0)S(5|5|4)

Winkel bei S: $\overrightarrow{SA}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SB}=\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$

$\cos^{-1}(\alpha)=16/34$ $\alpha=62°$
Winkel zwischen Ebenen:
$\cos^{-1}(|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|/(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|))$
wobei die Vektoren Normalenvektoren der Ebenen sind.
(ABS): $0{,}125x_1+0x_2+0{,}675x_3=1$ und Grundebene

$0x1+0x2+1x_3=0$
$\beta=\cos^{-1}(0{,}675/8{,}22)=85°$
Winkel zwischen Gerade und Ebene:
$\sin^{-1}(|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|/(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|))$
wobei ein Vektor Normalenvektor der Ebene, der andere Richtungsvektor der Geraden ist.
Winkel zwischen (AS) und Grundebene:
$\delta=\sin^{-1}(4/\sqrt{34})=43°$
[*Ende]
Ergänzung Parametergleichung Ebene:
Die Ebene (s.o.)

$$\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\quad (s,\ t\varepsilon R)$$

schneidet die Achsen in A(2|0|0) B(0|3|0) C(0|0|4).
Dies Punkte erhält man indem man s=0 und t=0, s=0 und t=1, s=1 und t=0 setzt. Setzt man s=1 und t=1, so ergibt sich D(-2|3|4). ABCD ist ein Parallelogramm.

Mit $0\leq s\leq 1$ und $0\leq t\leq 1$ erhält man alle Punkte dieses Parallelogramms.
Mit $0\leq s$, $0\leq t$ und $0\leq s+t\leq 1$ erhält man alle Punkte des Dreiecks ABC.

[*Anfang]Ergänzung zur Koordinatengleichung der Ebene:
Gegeben: E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$

Behauptung: $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ senkrecht auf E (Normalenvektor)

Beweis: Man betrachtet zwei Ebenenpunkte
$P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$, dann gilt

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1-p_1\\q_2-p_2\\q_3-p_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=(q_1-p_1)a+(q_2-p_2)b+(q_3-p_3)c=$$

$=(q_1a+q_2b+q_3c)-(p_1a+p_2b+p_3c)=d-d=0$

Ist $P(p_1|p_2|p_3)$ ein bestimmter Ebenenpunkt so ist in
$ax_1+bx_2+cx_3=d$
$d=ap_1+bp_2+cp_3$ und man kann die Gleichung der Ebene mit

Normalenvektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ auch so schreiben

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\right]=0$, $\vec{n}_E\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0$ Normalenform

$d=\frac{1}{|(\vec{n}_E)|}|\vec{n}_E\cdot(\vec{x}-\vec{p})|$ Hessesche Abstandsformel

Setzt man für X einen nicht auf E liegenden Punkt Q ein, so ergibt sich sein Abstand von E.
Für den Lotfußpunkt gilt

$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OQ}+d\frac{1}{|(\vec{n}_E)|}\vec{n}_E$, wenn d ohne Betrag rechts in obiger Formel eingesetzt wird.

Beispiel: $x_1-2x_2+2x_3=4$, $Q(2|1|-1)$

$\vec{n}_E=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $|\vec{n}_E|=3$, $d=\frac{1}{3}(1\cdot2-2\cdot1+2\cdot(-1)-4)=-2$

$\overrightarrow{OL}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ $L(\frac{4}{3}|\frac{7}{3}|-\frac{7}{3})$

Den Abstand eines Punktes Q von einer Geraden g bestimmt man, indem man die Ebene orthogonal zu g durch Q mit g schneidet.

Einen Punkt $Q(q_1|q_2|q_3)$ spiegelt man an einer Ebene oder Geraden, indem man zunächst den Lotfußpunkt $L(l_1|l_2|l_3)$ und die Mittelpunktsformel anwendet.
d.h. $l_1=0{,}5(q_1+q'_1)$, $q'_1=2l_1+q_1$ u.s.w.
[*Ende]

Als sie schließlich einen Auftrag für den Park eines Spielkasinos bekommen, beschließen sie auch noch Wahrscheinlichkeitsrechnung zu wiederholen bzw. zu lernen.

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung

5.1 Grundbegriffe

Das beliebteste Spiel im Casino ist bekanntlich das Roulette. Auf dem Rouletterad fällt die Kugel zufällig in eines der 37 Fächer, die von 0 bis 36 durchnummeriert sind. Gesetzt wird auf dem Roulettespielfeld:

	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	C36
0	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	C35
	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	C34
	12P				12M				12D				
	1-18		gerade						ungerade		19-36		

Im einfachsten Fall setzt man auf eines der Felder 1 bis 36 einen Chip. Fällt dann die Kugel in dieses Feld, erhält man seinen Einsatz zuzüglich dem 35-fachen, die Auszahlungsquote beträgt 35:1.

Man unterscheidet

Setzung	Beispiel	Auszahlungs-quote A	Wahrschein-lichkeit P
Rot	14	1:1	18/37
Scharz	13	1:1	18/37
Gerade	14	1:1	18/37
Ungerade	13	1:1	18/37
1-18	14	1:1	18/37
19-36	20	1:1	18/37
Benachbarte	14/13, 14/17	17:1	2/37
Querreihe	19/20/21	11:1	3/37
Erste 3	0/1/2	11:1	3/37
Vierer	23/24/26/27	8:1	4/37
Erste 4	0/1/2/3	8:1	4/37
Transversale	4/5/6/7/8/9	5:1	6/37
12P, 12M, 12D		2:1	12/37
C34, C35, C36		2:1	12/37

Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich als Quotient der für das Ereignis günstigen Ausgänge (bei rot 18) durch die Zahl der möglichen Ausgänge (37). Diese Formel darf aber nur bei gleich wahrscheinlichen Ausgängen angewandt werden.

A=(36-37P)/(37P), P=36/(37A-37)

Der Gewinn der Bank ergibt sich langfristig durch den Ausgang 0.

Beispiel:

Wenn bei 37 Spielen18 mal rot, 18 mal schwarz und 1 mal 0 kommt, dann hätte ein Spieler, der immer 10 € auf rot setzt, 10 € verloren.

Mathematisch spricht man von der Menge aller Ausgänge $S=\{0, 1, 2, 3, \ldots, 35, 36\}$ S ist das sichere Ereignis, $P(S)=1$.
Einelementige Teilmengen $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{36\}$ von S heißen Elementarereignisse.
$P(\{0\})=P(\{1\})=\ldots=P(\{36\})=1/37$ (da Summe 1 sein muss)
Beliebige Teilmengen heissen Ereignisse.
Das Ereignis ungerade wäre $\{1, 3, 5, \ldots, 33, 35\}$.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der enthaltenen Elementarereignisse.
$P(\{1, 3, 5, \ldots, 33, 35\})=P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\})+\ldots+P(\{33\})$
$+P(\{35\})=18/37$
Die Wahrscheinlichkeit, dass 38 fällt ist 0, man spricht vom unmöglichen Ereignis, das durch die leere Menge {} dargestellt wird. Man benötigt dieses Ereignis, wenn man Ereignisse verknüpfen will.
Wenn Uwe auf gerade und Ute auf ungerade setzt ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide gewinnen 0.
Es soll nun die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass Ute und Uwe gewinnen, wenn Uwe auf rot und Ute auf gerade setzt.
$R=\{1,3,5,7,9,12,14,16,18,19,21,23,25,27,30,32,34,36\}$
$G=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\}$
$R\cap G=\{12,14,16,18,30,32,34,36\}$ … Schnittmenge von R und G.
$P(R\cap G)=8/37$

	11	13	15	17		
1	3	5	7	2	4	6
	12	14	16	18	8	10
9	21	30	32	34	36	20
23	25	27	22	24	26	28
		19		0		

Wenn man im Mengenbild die Elemente von R gelb und die Elemente von G blau hinterlegt, so sind die Elemente der Schnittmenge grün hinterlegt. (Farbmischung!)
Bei gleicher Setzung kann man auch nach der Wahrscheinlichkeiten fragen, dass Uwe oder Ute gewinnt, so muss man die Vereinigungsmenge bilden RUG
(alle farbig hinterlegten Zahlen).
P(RUG)=28/37
Es gilt P(RUG)=P(R)+P(G)-P(R∩G)=18+18-8
Man kann auch fragen, wie wahrscheinlich es ist, dass Ute bei obiger Setzung nicht gewinnt.
Hierzu muss man die Komplementmenge $\bar{G}$ von G bilden.
$\bar{G}$={0,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35}
P($\bar{G}$)=19/37
Es gilt P(G)+P($\bar{G}$)=1

5.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Schließlich zur unangenehmsten Begriffsbildung, der bedingen Wahrscheinlichkeit:
Ute sieht, dass die Kugel in ein rotes Feld fällt, kann aber die Zahl noch nicht erkennen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie gerade?
Nach obiger Basisformel (günstig/möglich): $P_R(G)$=8/18
Es gilt $P_R(G)=\frac{P(G\cap R)}{P(R)}$, falls P(R∩G)=P(R)·P(G), R, G unabhängig.
Statt obigem Mengenbild kann man den Sachverhalt auch in der Vierfeldertafel darstellen:

$P(X_v \cap Y_>)$	R	$\bar{R}$	Summe: P(X)
G	8/37	10/37	18/37
$\bar{G}$	10/37	9/37	19/37
Summe: P(Y)	18/37	19/37	37/37

Damit kann man die unmöglichsten Fragestellungen betreffend 2 Ereignisse beantworten.

5.3 Wiederholungen

Ute hat von einem „todsicheren“ System gehört. Man setzt auf eine bestimmte Farbe und verdoppelt jedes mal, wenn man verliert. Dann gewinnt man bei jedem Farbwechsel den einfachen Einsatz.

Beispiel:

Gesetzt auf rot	Gefallen	Gewinn	Bilanz
1	schwarz	-1	-1
2	schwarz	-2	-3
4	schwarz	-4	-7
8	rot	8	1

Uwe lacht, das ist ein alter Hut, hast du schon einmal etwas von einem Limit gehört und von exponentiellem Wachstum?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt 10-mal nacheinander schwarz auf?

Hier gibt es wieder eine neue Schreibweise, die Zufallsvariable.

P(X=10) statt P({ssssssssss}).

$P(X=10)=(\frac{18}{37})^{10}\approx 0{,}00074=0{,}074\%=0{,}74\,^0/_{00}$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei 10 Spielen 5-mal schwarz und 5-mal rot auf. Wenn X die Zahl der schwarzen angibt,

$P(X=5)=(\frac{18}{37})^5(\frac{18}{37})^5\frac{10!}{5!5!}\approx 0{,}187=18{,}7\%$

also keinesfalls 50%.

! steht für Fakultät. Bei 10 verschiedenen Zahlen gibt es $10!=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ Anordnungsmöglichkeiten. Bei gleichen muss entsprechend reduziert werden.

Ute und Uwe fragen sich, ob es auch „Glücksspiele“ gibt, bei denen man den eigenen Kopf einsetzen kann, und spielen zu Hause 17 und 4.

|♦7; ♦8; ♦9; ♦10; ♦B; ♦D; ♦K; ♦A; ♥7; ...; ♥A; ♠7; ...; ♠A; ♣7; ...; ♣A|

Aus einem Skatblatt werden nacheinander Karten gezogen, dabei wertet das Ass 11, die Bilder 10, die anderen die aufgedrucke Zahl.

Uwe zieht 2-mal, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er 21?

Hier hilft ein Baumdiagramm

Ass=11, Bild oder 10: 10, Lusche=Lu sonst

|-04/32-11-|-16/31-10: P({11-10}) =(04/32)(16/31)
| |-15/31- $\overline{10}$:P({11- $\overline{10}$ }) =(04/32)(15/31)
-|-16/32-10-|-04/31-11:P({10-11}) =(16/32)(04/31)
| |-28/31- $\overline{11}$:P({10- $\overline{11}$ }) =(16/32)(28/31)
|-12/32-Lu-|-

Nachdem sie eine Weile gespielt haben bekommt Ute hohen Blutdruck.

Ü: (Unabhängigkeit)

Bei der Einnahme eines Medikaments zur Blutdrucksenkung bekommt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% Kopfschmerzen
und mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% Bauchschmerzen.
Beide Nebenwirkungen treten unabhängig voneinander auf.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man beide Nebenwirkungen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man mindestens eine Nebenwirkung?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man entweder Kopfschmerzen oder Bauchschmerzen?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man keine Nebenwirkung?

Lösung:
A sei das Ereignis Kopfschmerzen,
B das Ereignis Bauchschmerzen.

B: grün/blau 20

A(49)	A∩B(1)	B(19)	(931)

A: gelb/grün 50 farblos: keine Nebenwirkung

a) P(A∩B)=P(A)P(B)=0,05·0,02=0,001 (grün) ... 1 von 1000
b) P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B)=0,069 (gelb/grün/blau) ... 69 von 1000
c) P((AUB)\(A∩B))=0,069-0,001=0,068 (gelb/blau) ... 68 von 1000 (\=ohne)
d) 1-P(AUB)=0,931 ... 931 von 1000

[*Anfang]5.4 Einfache Tests:
Beispiel:
Bei der Herstellung eines Bauteils gibt es erfahrungsgemäß einen Ausschuss von p=10%. Ein Kunde öffnet eine Packung von n=100 Bauteilen. Wenn er mehr als 10 defekte Bauteile findet, lehnt er den Kauf ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit α (Irrtumswahrscheinlichkeit) hat er sich geirrt.
Lösung:
$\alpha=P(X>10)=P(X=11)+...+P(X=100)=1-P(X\geq 10)$
$=1-(P(X=0)+...+P(X=10))$
$=1-(0{,}1^{10}+(0{,}1)^9(0{,}9)^1\frac{10!}{9!1!}+(0{,}1)^8(0{,}9)^2\frac{10!}{8!2!}+...+(0{,}9)^{10})$
$\approx 0{,}42=42\%$
{11, 12, …, 100} heißt Ablehnungsbereich
Der relativ hohe α-Wert ist praktisch nicht anwendbar.
Umgekehrt kann man zu einem α-Werte den Ablehnungsbereich bestimmen.
Dazu benötigt man aber die Summenfunktion auf dem Taschenrechner.

Ü(Test)

Linksseitiger Signifikanztest

Ein Medikament gegen eine bestimmte Krankheit soll laut Hersteller eine Wirksamkeit von p=90% besitzen. Ein Arzt testet dies an n=15 Personen. Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit α für den Ablehnungbereich X≤11(=g), wenn X die Anzahl der erfolgreichen Behandlungen mit diesem Medikament ist.

Lösung:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

Ablehnungsbereich g_l , Annahmebereich

P(X≤11)=P(X=0)+P(X=1)+...+P(X=11)=≈0,055=5,5%

d.h. der Hersteller muss davon ausgehen, dass 5,5% aller Kunden mit der gleichen Ablehnungsvorstellung ablehnen werden, obwohl die Wirksamkeitsangabe zutreffend ist.

allg: P(X≤g)≤α

Vorgangsweise bei gegebenem α=0,5% im sonst gleichen Beispiel n=15, p=0,9:

Für g berechnet man der Reihe nach ausgehend vom Erwartungswert np=13,5

(WT mit Summenfunktion erforderlich)

P(X≤g)=binomcdf(15,0.9,13)≈0,45 ...

P(X≤g)=binomcdf(15,0.9,10)≈0,01

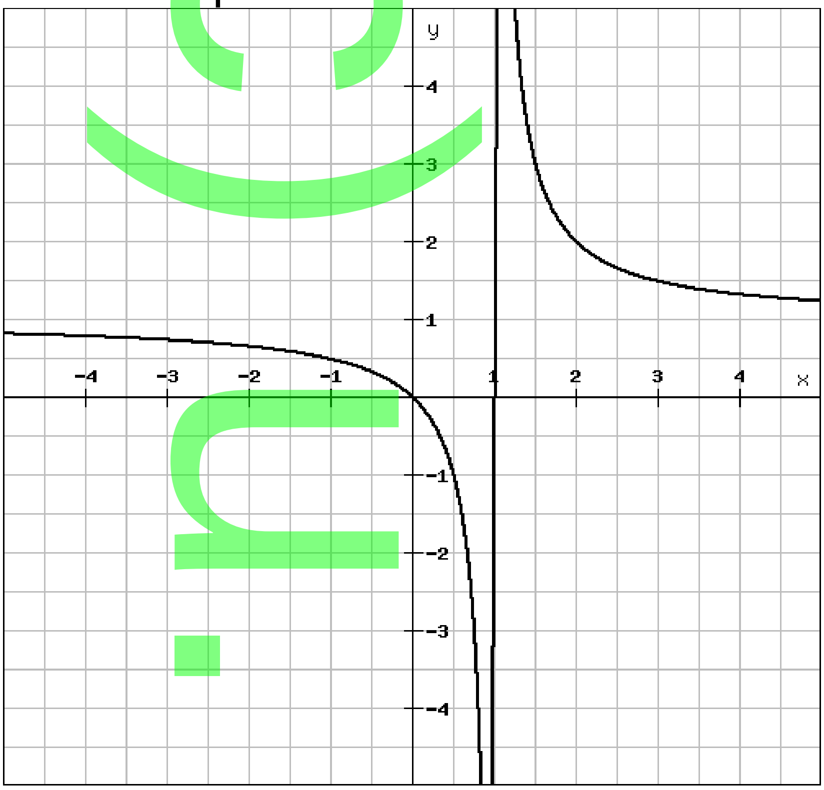
P(X≤g)=binomcdf(15,0.9,9)≈0,002

also g=9

Ü Test (rechtsseitig)
Ein Gartenbauversand versichert, dass unter seinen Tulpenzwiebeln höchstens $p=10\%$ Ausschuss sind.
Ein Kunde bestellt $n=50$ Zwiebeln und reklamiert sobald mehr als
5 Zwiebeln nicht aufgehen.
a) Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit α reklamiert der Kunde?
b) Bestimme den Ablehnungsbereich für eine Irrtumswahrscheinlichkeit 12%.
Lösung:
$n=50$, $p=0{,}1$
a) 0 1 2 3 4 5 <u>6 7...48 49 50</u>
In der Zeichnung ist der Ablehnungsbereich unterstrichen und tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von
T (C und S s.o.)
$1-P(X\leq5)\approx38{,}4\%$ auf.
b) Gemäß Zeichnung in Teilaufgabe a) berechnet man der Reihe nach
$1-P(X\leq6)$, $1-P(X\leq7)$, $1-P(X\leq8)$, ... bis ungefähr 12% herauskommt.
T (C und S s.o.)
$1-P(X\leq8)\approx12{,}2\%$ auf.
Ergebnis: $9\leq X\leq50$
[*Ende]

[*Anfang]Teil 3 Gebrochen rationale Funktionen

1. Einführendes Beispiel



Gezeichnet ist das Schaubild der Funktion f: f(x)= $\frac{x}{x-1}$

Der Funktionsterm hat für die Fotografie eine wichtige Bedeutung. Er resultiert aus folgender Aufgabenstellung: Mit einer Linse der Brennweite 1cm (Handy) soll ein Bild aufgenommen werden.

Bei der Gegenstandsweite x in cm gibt f(x) in cm die Bildweite an.

Beispiel: x=100, f(x)≈1,01

Badische Zeitung 22.3.2014

Viele Smartphones setzen auf zwei verschiedene Kameras. Eine hochwertigere Autofokuskamera auf der Rückseite fürs Fotografieren und Filmen sowie eine etwas einfachere Kamera auf der Vorderseite für die Videotelefonie. Die Autofokuskamera besteht üblicherweise aus einem Linsensystem mit einem Stapel von vier bis sechs Einzellinsen. Ein kleiner Motor bewegt den Stapel um

Zehntelmillimeter und stellt so das Bild auf dem Bildsensor scharf. "Das Linsensystem korrigiert Bildfehler wie etwa Verzeichnungen und Farbfehler", sagt Oliver Schindelbeck vom Optikhersteller Carl Zeiss in Oberkochen. Der Autofokus erlaubt ein Scharfstellen im Distanzbereich von 15 Zentimetern bis unendlich.
Beim Fixed-Fokus ist das Linsensystem hingegen fest verbaut. Die Abbildungsqualität ist schlechter, die Tiefenschärfe reicht von einem Meter bis unendlich. Fixed-Fokus ist in der Regel bei Einfachhandys verbaut. Ein Modul kostet nur rund fünf Euro. Eine Autofokusoptik schlägt hingegen mit 15 bis 50 Euro zu Buche. Drei bis fünf Millimeter sind die typischen Maße einer solchen Kamera, zu groß für die flacheren Handys der Zukunft. Deshalb wird daran gearbeitet, die Kameraoptiken weiter zu miniaturisieren.

Mathematische Betrachtung zur Funktion:

f:f(x)= $\frac{x}{x-1}$

Das Grafikprogramm zeichnet zwei durch die Gerade x=1 getrennte Kurven (für das Fotografieren ist nur die rechte Seite relevant).
Bei der der Gerade x=1 handelt es sich um eine vertikale Asymptote.
Die Berechnung von f(1) ist nicht möglich, da man durch 0 nicht dividieren kann.
Die maximale Definitionsmenge von f ist daher R\{1}.
Wie kommt nun das Grafikprogramm dazu die Gerade x=1 zu zeichnen? Warum kommt keine Fehlermeldung?
Im Zeichenprogramm gibt es die 0 nur näherungsweise.

Annäherung von links:

x	f(x)
0	1
0,9	-9
0,99	-99
1	-

Annäherung von rechts:

x	f(x)
2	2
1,1	11
1,01	101
1	-

Die Gerade ist sozusagen die Verbindung der Punkte (0,99|-99) und (1,01|101).
Mathematische Schreibweise:

$\frac{x}{x-1}$ →-∞ für x→1-0, $\frac{x}{x-1}$ →+∞ für x→1+0

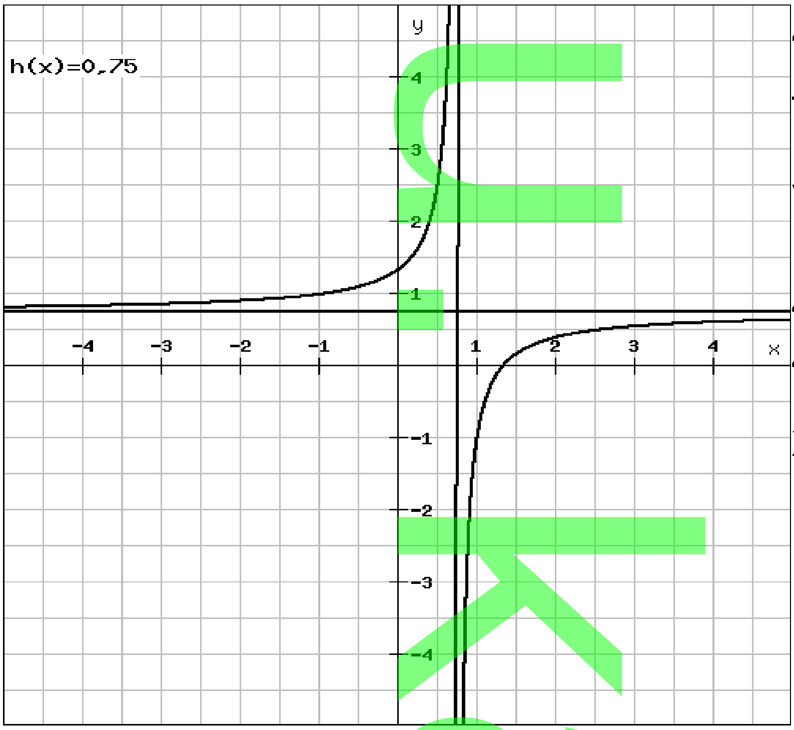
In obigem Schaubild kann man noch die horizontale Asymptote y=1 einzeichnen.
Setzt man der Reihe nach für x die Werte 10, 100, 1000, ...ein,
so erhält man für f(x) immer genauere Näherungswerte für 1.
Das Gleiche gilt für -10, -100, -1000, …
Mathematische Schreibweise:

$\frac{x}{x-1}$ →1 für x→∞, $\frac{x}{x-1}$ →1 für x→-∞

Im Gegensatz zu Asymptoten bei Exponentialfunktionen gilt hier die horizontale Asymptote zweiseitig.

Allgemein:
Vertikale Asymptote x=a, wenn |f(x)|→∞ für x→a-0 und |f(x)|→∞ für x→a+0 .
Horizontale Asymptote y=b, wenn f(x)→b für |x|→∞.

2. Schaubilder der Funktionen f(x)= $\frac{ax+b}{cx+d}$ (x≠- $\frac{d}{c}$)



Zeichenbeispiel:
f(x)= $\frac{3x-4}{4x-3}$ (x≠ $\frac{3}{4}$)
vertikale Asymptote:
(Nenner=0)
4x-3=0|+3
4x=3|:4
x= $\frac{3}{4}$ …
Gleichung v. A.

horizontale Asymptote
$\frac{3x-4}{4x-3} = \frac{x(3-4/x)}{x(4-3/x)} = \frac{3-4/x}{4-3/x} \to \frac{3}{4}$ für |x|→∞, y= $\frac{3}{4}$
Verwendet wurde die Ausklammermethode, wobei 4/x→0 für |x|→∞ und 3/x→0 für |x|→∞ als bekannt vorausgesetzt wird.
Verallgemeinerung:
$\frac{a_n x^n + \ldots}{b_n x^n + \ldots} \to \frac{a_n}{b_n}$ für |x|→∞, y= $\frac{a_n}{b_n}$

vorausgesetzt Zählergrad=Nennergrad und n größter Exponent.

Zurück zum Schaubild zu f(x)= $\frac{3x-4}{4x-3}$.

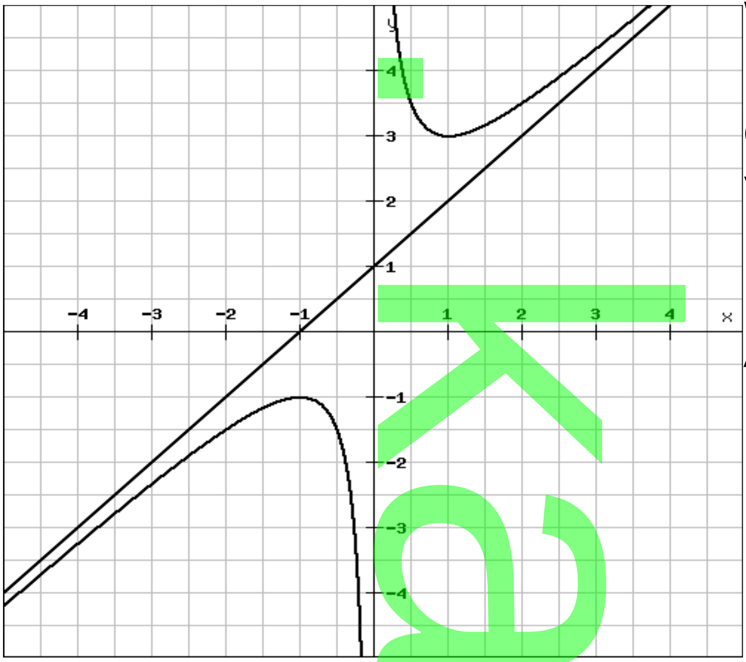
3. Schiefe Asymptote

Zeichenbeispiel:

f(x)=x+1+ $\frac{1}{x}$ (x≠0)

Der Funktionsterm setzt sich aus dem ganzrationalen Teil $f_1(x)=x+1$ und dem gebrochen rationalen Teil

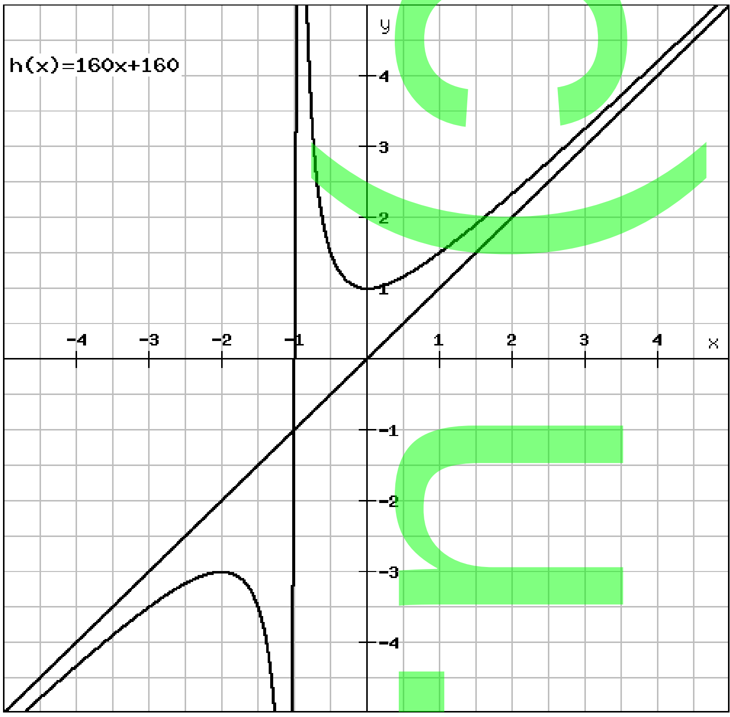
$f_2(x)=\frac{1}{x}$ zusammen.



Wegen des gebrochen rationalen Teils ist hier die y-Achse (x=0) vertikale Asymptote. Da f2(x)→0 für |x|→∞, ist y=x+1 schiefe Asymptote.

Bei Angabe von f(x) in der Form f(x)= $\frac{x^2+x+1}{x}$, kann man die Aufspaltung leicht vornehmen, man teilt einfach jeden Summanden des Zählers durch x.

Im folgenden Beispiel geht dies nicht so einfach.



Zeichenbeispiel:

$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ $(x\neq -1)$

Zwar kann die vertikale Asymptote x=-1 leicht abgelesen werden, die schiefe Asymptote aber nicht. Es scheint sich um y=x zu handeln.

Hier hilft uns die Polynomdivision weiter

$(x^2+x+1):(x+1)=x+1/(x+1)$

$\underline{-(x^2+x)}$

$\quad\quad\quad 1$

Der Vorgang ist analog zur gewöhnlichen Division zu sehen:

100:3=33+1/3

$\underline{\ -9}$

$\ \ 10$

$\ \ \underline{-9}$

$\ \ \ \ 1$

4. Ableitung und Aufleitung
4.1 Ableitung
Zur Ableitung von Quotienten benötigt man zunächst die Ableitung von Produkten.
Gegeben sind die Funktionen u: u(x) und v: v(x) mit Ableitungen u': u'(x) und v': v'(x) über einem bestimmten Intervall.
Dann gilt: [u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) über dem gegebenen Intervall.
Beweis:
zu zeigen:

$$\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \rightarrow u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \text{ für } h\rightarrow 0$$

(1. Umformung)

$$\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}=$$

(2. Umformung)

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}u(x)$$

→ u'(x)v(x)+u(x)v'(x) für h→0, gemäß Voraussetzung.
Zusätzlich benutzt wurde: v(x+h)→v(x) ür h→0.
Diese Eigenschaft nennt man Stetigkeit und folgt aus der Ableitbarkeit.
Durch Anwendung von Produkt- und Kettenregel ergibt sich schließlich die Quotientenregel

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=(z(x)\cdot(n(x))^{-1})'=z'(x)\cdot n(x)^{-1}+z(x)\cdot(-1)n(x)^{-2}\cdot n'(x)$$

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)n(x)-z(x)n'(x)}{n(x)^2} \text{ … Quotientenregel}$$

Beispiel:

$$\left(\frac{3x-4}{4x-3}\right)'=\frac{3(4x-3)-(3x-4)4}{(3x-4)^2}=\frac{7}{(3x-4)^2}$$

Hinweis: Für höhere Ableitungen darf man den Nenner nicht ausmultiplizieren. In diesem Beispiel schreibt man die rechte Seite in der Form $7(3x-4)^{-2}$, dann genügt die Kettenregel.

b) Aufleitung

Wie wir schon gesehen haben ist die Potenzregel schon bei der Kehrwertfunktion nicht anwendbar.

$f(x)=x^{-1}$ $F(x)=\frac{1}{0}x^0$ geht nicht!

Die richtige Aufleitung findet man folgendermaßen:

$e^{\ln(x)}=x|'$

$e^{\ln(x)}(\ln(x))'=1$

$x(\ln(x))'=1|:x$

$(\ln(x))'=x^{-1}$

Damit ist $F(x)=\ln(x)+c$.

Damit kann man aber bei weitem nicht jede gebrochen rationale Funktion aufleiten.

weitere Möglichkeit: Partialbruchzelegung

Beispiel: $\frac{1}{x^2-1}=\frac{0,5}{x-1}-\frac{0,5}{x+1}$

5. Besonderes

tritt auf, wenn die Nennernullstellen auch im Zähler vorliegen.

Beispiel 1: $f(x)=\frac{x^2+x}{x}$ $(x\neq 0)$

Der Term kann gekürzt werden und lautet dann x+1. Das Schaubild hat aber an der Stelle x=0 eine Lücke,

Beispiel 2; $f(x)=\frac{x}{x^2+x}$ $(x\neq 0;\ -1)$

Auch hier kann gekürzt werden: $\frac{x}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}$, auch hier bleibt 0 ausgeschlossen.

Übung:

a) $f(x)=(x+1)^2/(x^2-2x)$

Geben Sie die Gleichung der Tangente im Ursprung an; bestimmen Sie ihren Schnittpunkt mit dem Schaubild.

Ergebnisse: Abl.($f'(x)=2(2x-1):(x+1)^3$; $f''(x)=2(5-4x):(x+1)^4$); As.($x=-1$; $y=1$); NS.($(2|0)$; $(0|0)$); EP.(T$(0{,}5|-1/3)$); WP.($(1{,}25|-5/27)$); S$(-2{,}5|5)$

b) $f(x)=-x^3/(1-x^2)$

Ergebnisse: Abl.($f'(x)=x^2(x^2-3)/(x^2-1)^2$; $f''(x)=2x(x^2+3)/(x^2-1)^3$); As.($x=-1$; $x=1$; $y=x$); N$(0|0)$=W$(0|0)$; TH$(\pm\sqrt{3}|\pm 1{,}5\sqrt{3})$

c) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f: $f(x)=(1+x^2)/(1-x)$, den Koordinatenachsen und der Geraden $x=-1$.

Ergebnisse: $f(x)=-1-x+2:(1-x)$; $f'(x)=(-x^2+2x+1):(1-x)^2$; $f''(x)=4:(1-x)^3$; $F(x)=-x-0{,}5x^2-\ln(1-x)$; $A=2\ln(2)-0{,}5$